Anna Turczak[1]
Zachodniopomorska Szkoła Biznesu w Szczecinie

O wyborze wielkości jednorazowego zakupu[2]

Minimalizacja całkowitych kosztów związanych z gromadzeniem zapasów jest najlepszym kryterium podejmowania decyzji optymalizacyjnych w zakresie zarządzania zapasami. Artykuł wyjaśnia, w jaki sposób progi upustowe wpływają na wybór wielkości jednorazowego zakupu.

Prowadzenie niemal każdej działalności wymaga utrzymywania określonej wielkości różnego rodzaju zapasów. Konieczność istnienia zapasów wynika między innymi z sezonowości surowca, długości cyklu produkcyjnego, opóźnień w dostawach, efektywności i precyzyjności planowania produkcji, jej kontroli i koordynacji, obowiązującej mody itp. Utrzymywanie na optymalnym poziomie zapasów w przedsiębiorstwie zapewnia zachowanie odpowiedniej ciągłości w realizacji zamówień odbiorców przy właściwej rytmice produkcji. Dlatego też tak ważne jest prawidłowe określenie postulowanej wielkości i struktury zapasów.

Zapasy są kategorią wewnętrznie zróżnicowaną, obejmującą surowce, materiały, produkcję w toku, półfabrykaty, wyroby gotowe oraz towary. Wymienione pozycje charakteryzują się najniższym stopniem płynności finansowej spośród wszystkich elementów majątku obrotowego firmy.

Kształtowanie się zapasów w przedsiębiorstwie istotnie wpływa na jego pozycję finansową. Nadmierne zapasy angażują duże środki finansowe, prowadząc do zamrożenia części kapitału pracującego i zmniejszenia płynności finansowej przedsiębiorstwa. Nadmierny zapas pociąga za sobą duże koszty magazynowania, w tym koszty utraconych korzyści. Z drugiej jednak strony eliminuje problem braku surowców, materiałów czy półproduktów. Z kolei niedobór zapasów zwiększa ryzyko zachwiania ciągłością produkcji (dotyczy to zapasów surowców i materiałów) lub sprzedaży (dotyczy wyrobów i towarów). Konieczne jest więc znalezienie w tym zakresie optimum.

Kluczowe znaczenie dla podejmowania decyzji optymalizacyjnych w zakresie gospodarowania zapasami ma poprawne zbudowanie modelu matematycznego. Dzięki takiemu modelowi możliwe stanie się wyznaczenie najkorzystniejszej wielkości jednorazowego zakupu (jednorazowej partii dostawy).

Problem optymalizacji wielkości jednorazowego zakupu rozpatrywać należy jako minimalizację rocznego kosztu całkowitego, związanego z gromadzeniem zapasów. Dla przykładu, niech przedsiębiorstwo w okresie roku kupuje określony rodzaj dobra w ilości Q. Zużycie następuje równomiernie w ciągu przyjętego okresu. Firma kupuje to dobro partiami. Zakupując poszczególne partie przedsiębiorstwo płaci stałą cenę jednostkową zakupu pz. Z każdą transakcją zakupu związane są dodatkowe koszty stałe Ks, ponoszone przy przygotowaniu zamówienia i przeprowadzeniu transakcji. Ponadto przedsiębiorstwo ponosi koszty magazynowania tego dobra, wynoszące rocznie km za jednostkę. Powstaje więc problem decyzyjny, ile kupować, aby koszty całkowite związane z gromadzeniem zapasów były minimalne[3].

Poniżej przedstawiona zostanie metoda wyznaczenia wielkości dostawy dobra, optymalnej z punktu widzenia minimalizacji łącznych kosztów zakupu, przygotowania i przeprowadzenia transakcji oraz magazynowania. W celu zbudowania użytecznego modelu matematycznego w tym zakresie, zdefiniowane i sklasyfikowane zostaną główne pozycje kosztowe, stanowiące o wysokości kosztów całkowitych gromadzenia zapasów K_c. Składają się one z dwóch rodzajów odmiennych co do istoty kosztów:

- kosztów związanych z przeprowadzanymi transakcjami
- kosztów związanych z utrzymywaniem zapasów w magazynie.

Koszty związane z przeprowadzanymi transakcjami są sumą dwóch składników:

- stałych kosztów transakcji ponoszonych przy przygotowaniu i realizacji zamówienia (w tym ewentualnie koszty transportu, jeżeli obciążają odbiorcę)
- kosztów zakupu.

Koszty związane z przeprowadzanymi transakcjami można nazwać inaczej kosztami nabycia.

Z kolei koszty, związane z utrzymywaniem zapasów w magazynie, to głównie:

- koszty składowania
- koszty ubezpieczeń (od szkód losowych, kradzieży itp.)
- koszty utraconych korzyści (na przykład potencjalne odsetki od kapitału zamrożonego w postaci zapasów).

Tak więc, ujmując zagadnienie matematycznie, struktura rocznego kosztu całkowitego, związanego z gromadzeniem zapasów, ma następującą postać:

$$K_c = K_s \cdot \frac{Q}{D} + p_z \cdot Q + k_m \cdot Z_{śr.}$$

gdzie:

K_c – roczne koszty ogólne (całkowite) gromadzenia zapasów,

K_s – koszt stały związany z przygotowaniem i przeprowadzeniem jednej transakcji,

Q – roczne zapotrzebowanie na dane dobro,

D – wielkość jednorazowego zakupu,

p_z – cena zakupu (jednostkowy koszt zmienny zakupu),

k_m – jednostkowy roczny koszt magazynowania,

$Z_{śr.}$ – zapas średni (przeciętny).

Warto dokonać chociażby pobieżnej analizy elementów przedstawionego modelu. Całkowite koszty zakupu stanowią iloczyn jednostkowej ceny zakupu i ilości zamówionego dobra. Jednostkowy koszt nabycia składa się z jednostkowego kosztu zmiennego zakupu (ceny zakupu) oraz kosztu stałego przygotowania i przeprowadzenia transakcji, przypadającego na jednostkę zamówionego dobra. Otrzymuje się zatem:

$$p_n = \frac{K_s}{D} + p_z$$

gdzie:

p_n – cena nabycia (jednostkowy koszt nabycia rozpatrywanego dobra).

[1] Dr Anna Turczak, e-mail: aturczak@zpsb.szczecin.pl

[2] Artykuł recenzowany (*przyp. red.*)

[3] Por. *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*. Praca zbiorowa pod red. K. Kukuły, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000, s. 236.

Oczywiste jest, że wraz ze wzrostem wielkości jednorazowego zakupu zmniejszają się koszty przygotowania i realizacji zamówienia, przypadające na jednostkę zakupionego dobra. Przy zwiększaniu wielkości jednorazowego zakupu w nieskończoność można teoretycznie zredukować koszt jednostkowy do poziomu kosztu jednostkowego zmiennego, gdyż koszty stałe rozkładają się wtedy na nieskończenie wiele jednostek dobra. Z przedstawionych rozważań wynika, że algorytm służący wyznaczeniu rocznego kosztu całkowitego, związanego z gromadzeniem zapasów, ma następującą postać:

$$K_c = p_n \cdot Q + k_m \cdot Z_{śr.}$$

Zapas przeciętny dla danego dobra stanowi sumę zapasu minimalnego i połowy wielkości jednorazowego zakupu, co wyraża poniższy wzór[4]:

$$Z_{śr.} = Z_R + \frac{D}{2}$$

Oznacza to, że na poziom zapasu przeciętnego mają wpływ wszystkie czynniki warunkujące wysokość zapasu rezerwowego oraz wielkość jednorazowej dostawy.

Dalej przyjęte zostanie założenie, że całkowite koszty związane z gromadzeniem zapasów K_c są funkcją zmiennej decyzyjnej D, czyli wielkości jednorazowej partii dostawy, natomiast pozostałe wielkości ujęte w modelu są stałe, a zatem stanowią parametry tej funkcji. Formalnie przedstawia to poniższy wzór:

$$K_c(D) = p_n \cdot Q + k_m \cdot Z_{śr.}$$

lub inaczej:

$$K_c(D) = K_s \cdot \frac{Q}{D} + p_z \cdot Q + k_m \cdot Z_R + k_m \cdot \frac{D}{2}$$

gdzie:

D – argument funkcji,

$K_c(D)$ – wartość funkcji.

W celu obliczenia optymalnej wielkości jednorazowego zakupu wyznaczone zostanie minimum kosztów $K_c(D)$. Aby istniało minimum tej funkcji, muszą być spełnione jednocześnie następujące warunki:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K_c(D)}{\partial D} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 K_c(D)}{\partial D^2} > 0 \end{cases}$$

Pierwsza pochodna jest postaci:

$$\frac{\partial K_c(D)}{\partial D} = -\frac{K_s \cdot Q}{D^2} + \frac{k_m}{2}$$

Druga pochodna ma natomiast postać:

$$\frac{\partial^2 K_c(D)}{\partial D^2} = \frac{2 \cdot K_s \cdot Q}{D^3}$$

Ponieważ $\bigwedge_{D>0} \frac{\partial^2 K_c(D)}{\partial D^2} > 0$, więc funkcja $K_c(D)$ jest wypukła.

A zatem minimum obliczyć można z przyrównania pierwszej pochodnej do zera. Czyli:

$$-\frac{K_s \cdot Q}{D_{op.}^2} + \frac{k_m}{2} = 0$$

gdzie:

$D_{op.}$ – optymalna wielkość jednorazowego zakupu.

Ostatecznie formuła dotycząca optymalnej wielkości jednorazowego zakupu jest następująca:

$$D_{op.} = \sqrt{\frac{2 \cdot K_s \cdot Q}{k_m}}$$

Przyjmując zatem, że K_s, Q, p_z, k_m i Z_R są stałe, a zmienną decyzyjną jest tylko D, można narysować w dwuwymiarowym układzie współrzędnych wykres funkcji całkowitych kosztów gromadzenia zapasów K_c. Funkcja ta składa się z dwóch części:

- kosztów nabycia – jest to składnik $K_1(D)$ funkcji $K_c(D)$:

$$K_1(D) = K_s \cdot \frac{Q}{D} + p_z \cdot Q$$

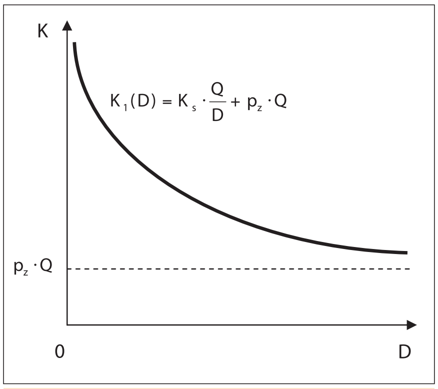
- kosztów związanych z utrzymywaniem zapasów w magazynie – jest to składnik $K_2(D)$ funkcji $K_c(D)$:

$$K_2(D) = k_m \cdot Z_R + k_m \cdot \frac{D}{2}$$

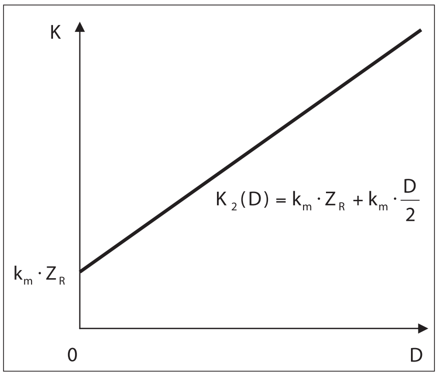
Wykres funkcji $K_1(D)$ jest ramieniem hiperboli, przy czym asymptota pozioma prawostronna ma wzór: $K = p_z \cdot Q$, a asymptota pionowa prawostronna jest postaci: $D = 0$. Funkcja ta nie ma punktów wspólnych z osiami układu współrzędnych. Jest to funkcja malejąca, zatem zwiększanie wielkości jednorazowego zakupu powoduje spadek kosztów nabycia.

Z kolei wykresem funkcji $K_2(D)$ jest prosta o współczynniku kierunkowym $\frac{k_m}{2}$ oraz wyrazie wolnym $k_m \cdot Z_R$. Jest to funkcja rosnąca, czyli wraz ze wzrostem wielkości jednorazowego zakupu zwiększa się wartość kosztów związanych z utrzymywaniem zapasów w magazynie. Funkcja $K_2(D)$ nie ma miejsc zerowych.

Rysunek 1 przedstawia wykres funkcji $K_1(D)$, a rysunek 2 prezentuje wykres funkcji $K_2(D)$.



Rys. 1. Wykres funkcji kosztów nabycia.



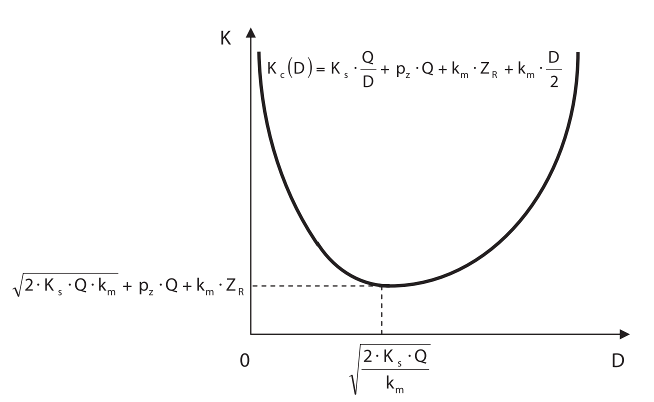
Rys. 2. Wykres funkcji kosztów związanych z utrzymywaniem zapasów w magazynie

Z analizy pierwszej i drugiej pochodnej funkcji $K_c(D)$ oraz z budowy funkcji $K_1(D)$ i $K_s(D)$ wynika, jak będzie przebiegał wykres funkcji kosztów całkowitych związanych z gromadzeniem zapasów. Funkcja ta będzie miała minimum dla $D_{op.}$ Zatem zamawiając partię dostawy mniejszą albo większą od $D_{op.}$, należy liczyć się z poniesieniem wyższych kosztów z tym związanych. Dla $D < D_{op.}$ pierwsza pochodna funkcji $K_c(D)$ jest ujemna, zatem funkcja ta w przedziale $(0, D_{op.})$ będzie malejąca. Z kolei dla $D > D_{op.}$ pierwsza pochodna funkcji $K_c(D)$ jest dodatnia, więc funkcja ta w przedziale $(D_{op.}\ +\infty)$ będzie rosnąca. Podstawiając wielkość $D_{op.}$ do wzoru na koszty całkowite, związane z gromadzeniem zapasów, otrzymuje się następującą formułę matematyczną na najniższą możliwą wartość tych kosztów:

$$K_c\left(\sqrt{\frac{2 \cdot K_s \cdot Q}{k_m}}\right) = \sqrt{2 \cdot K_s \cdot Q \cdot k_m} + p_z \cdot Q + k_m \cdot Z_R$$

Rysunek 3 przedstawia wykres funkcji $K_c(D)$.

[4] Por. Federowicz Z., *Finanse przedsiębiorstwa*, „Poltext”, Warszawa 1995, s. 149.

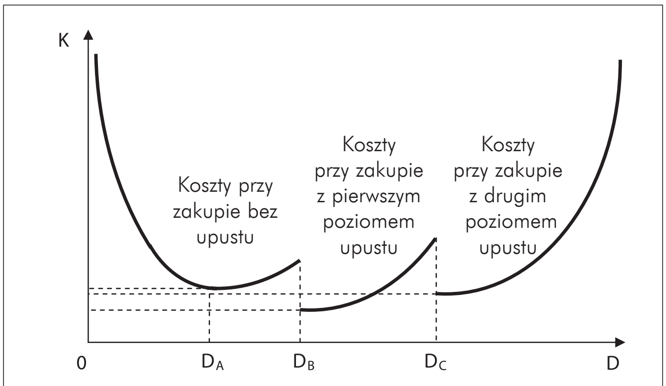


Rys. 3. Wykres funkcji całkowitych kosztów związanych z gromadzeniem zapasów.

Reasumując należy stwierdzić, iż przy zmniejszaniu (zwiększaniu) wielkości jednorazowej partii dostawy trzeba wziąć pod uwagę wzrost (spadek) kosztów związanych z przeprowadzaną transakcją (kosztów nabycia) i spadek (wzrost) kosztów związanych z utrzymywaniem zapasów w magazynie. Dlatego właśnie mówi się o optymalizacji, a nie minimalizacji wielkości jednorazowego zakupu.

Przedstawiony model trochę się komplikuje w sytuacji, gdy cena zakupu p_z nie jest stała, ponieważ dostawca oferuje upusty przy zakupie większej ilości danego dobra. W przypadku takim należy obliczyć wartość całkowitych kosztów związanych z gromadzeniem zapasów dla optymalnej wielkości jednorazowego zakupu oraz dla każdego z progów upustowych oddzielnie. Następnie z obliczonych dla każdego wariantu całkowitych kosztów związanych z gromadzeniem zapasów trzeba wybrać wartość najniższą. Zatem poziom *D*, dla którego otrzymano najmniejszą wartość K_c, jest najkorzystniejszą wielkością jednorazowego zakupu.

Sytuację dla dwóch progów upustowych, dla których wymagany jest zakup wyższy niż optymalna wielkość jednorazowego zakupu, prezentuje rysunek 4.



Rys. 4. Wykres przedstawiający całkowite koszty związane z gromadzeniem zapasów w przypadku ustanowienia progów upustowych.

Z rysunku 4 wynika, że w przypadku dwóch progów upustowych, dla których wymagany jest zakup wyższy niż optymalna wielkość jednorazowego zakupu, najniższe całkowite koszty związane z gromadzeniem zapasów otrzymuje się dla *D* na poziomie D_B, czyli korzystając z pierwszego upustu. Oczywiście rozwiązanie to nie jest regułą. W innej sytuacji może się okazać, że najbardziej opłaca się zamówić taką partię, która pozwoli na skorzystanie z najgłębszego, czyli drugiego upustu.

Z kolei przy jeszcze inaczej dobranych parametrach modelu najkorzystniejszą wielkością jednorazowej dostawy może być D_A. Zatem każdy taki przypadek należy przeanalizować.

STRESZCZENIE

Kształtowanie się zapasów w przedsiębiorstwie istotnie wpływa na jego pozycję finansową. Nadmierne zapasy angażują zbyt duże środki finansowe, prowadząc do zmniejszenia płynności finansowej przedsiębiorstwa. Nadmierny zapas pociąga za sobą wysokie koszty magazynowania, w tym koszty utraconych korzyści, z drugiej jednak strony sytuacja taka eliminuje problem braku materiałów, surowców, półproduktów czy produktów gotowych. Niedobór zapasów natomiast zwiększa ryzyko zachwiania ciągłością produkcji lub sprzedaży.

Artykuł prezentuje metody kalkulacji najkorzystniejszej wielkości jednorazowego zakupu. Minimalizacja całkowitych kosztów związanych z gromadzeniem zapasów jest najlepszym kryterium podejmowania decyzji optymalizacyjnych w tym zakresie.

SUMMARY

Company's stock influences considerably its financial standing. Superfluous stock involves too large financial resources and leads to the decrease in the liquidity. Superfluous stock causes high stocking costs, including the opportunity costs. But, on the other hand, that situation eliminates the problem connected with lack of materials, raw materials, semi-finished products or final products. However, the shortage of stocks increases the risk of manufacturing or sale continuity interruption.

The article presents the methods of calculating the most profitable ordering quantity. The minimization of total costs associated with the stocks is the best criterion for making optimizing decisions in that area.