

Edward RYDYGIER<sup>1</sup>  
Zygmunt STRZYŻAKOWSKI<sup>2</sup>

### MODELOWANIE ZAGADNIEN W UKŁADZIE POJAZD SZYNOWY - TOR

*W pracy przedstawiono opracowane efektywne metody modelowania użyteczne w modelowaniu wybranych zagadnień w układzie pojazd szynowy – tor. Wykorzystano metody numeryczne identyfikacji źródeł pola dla układów opisanych równaniem różniczkowym Poissona. Metody te stanowią adaptację metody symulacyjnej wykorzystującej narzędzia obliczeniowe z obszaru analizy kombinatorycznej uzupełnione procedurami regularyzującymi. Wykazano, że metoda może znaleźć zastosowanie także w warunkach zredukowanych danych pomiarowych ograniczonych do wyników pomiarów wykonanych na brzegu badanego obszaru. Ponieważ wzięto pod uwagę pola fizyczne opisane równaniem Poissona, zatem opracowane metody mogą być przydatne w badaniu tylko pewnych zagadnień w układzie pojazd szynowy – tor, jak np. identyfikacja parametrów naprężeń dla skręcania szyny kolejowej przy wymuszeniach siłowych oraz identyfikacja źródeł ciepła w szynie spowodowanych kontaktem tocznym. Wyniki identyfikacji źródeł ciepła w szynie spowodowane kontaktem tocznym koło-szyna mogą zostać wykorzystane do weryfikacji cech mechanicznych kontaktu. Przedstawiono także oryginalną metodę modelowania dynamiki kontaktu koło-szyna dla siły wertykalnej w oparciu o pojęcie energii jednoczesnej stosowane w badaniach obwodów elektrycznych.*

### MODELLING ISSUES IN A RAIL VEHICLE – TRACK SYSTEM

*In this paper there are presented effective modeling methods useful to investigations of selected issues in a rail vehicle – track system. The numerical methods of field sources identification were used for systems described by a Poisson equation. These methods are constructed on the bases of the simulation method with the use of computational tools from the combinational analysis supplemented with a special regularization procedure. It is proved that this method may be used in the case of limited number of experimental data, e. g. only from the border of domain. These methods may be applied to identify tension parameters of torsion of a rail or to identify heat sources in a term trace in a rail generated by the rolling wheel-rail contact. Results may be used to verify the mechanical properties of rolling contact. Also there is presented the dynamical modelling method useful to study a wheel-rail contact for vertical force. This method is constructed with the use of the one period energy concept from the electrical engineering.*

<sup>1</sup> Politechnika Radomska, Wydział Transportu i Elektrotechniki,  
MacLeod Institute of Simulation Sciences, Satellite Center at the Technical University of Radom,  
Radom 26-600; ul. Malczewskiego 29. Tel. 22 338-94-40, E-mail: rydygier@o2.pl

<sup>2</sup> Politechnika Radomska, Wydział Transportu i Elektrotechniki; Instytut Automatyki i Telematyki,  
Radom 26-600; ul. Malczewskiego 29. Tel. 48 361-77-15, E-mail: zstrz@data.pl

## 1. WSTĘP

W pracy przedstawiono efektywne metody identyfikacji źródeł pola użyteczne w modelowaniu wybranych zagadnień w układzie pojazd szynowy – tor. Znalazienie rozwiązań zagadnień identyfikacji źródeł ma duże znaczenie praktyczne, gdyż często z powodu braku możliwości dokładnych pomiarów albo utrudnień w dostępie do wnętrza układu, trudno jest uzyskać wystarczającą liczbę danych pomiarowych potrzebnych do bezpośredniego określenia położenia i intensywności źródeł wytwarzających dane pole. Ponieważ wzięto pod uwagę pola opisane równaniem Poissona opracowane metody identyfikacji są przydatne przy badaniu zagadnień wytrzymałościowych i cieplnych.

## 2. METODY IDENTYFIKACJI ŹRÓDEŁ POLA

Opis układu 2-D za pomocą równaniem Poissona ze znanymi warunkami brzegowymi  $u$  na brzegu  $\Gamma$  badanego obszaru przyjmuje postać następującego równania różniczkowego cząstkowego [3]

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (1)$$

gdzie:  $x \in (0, l_x)$ ,  $y \in (0, l_y)$ ,

$u = u(x, y) \in R^2$  - funkcja polowa,

$f = f(x, y) \in R^2$  - funkcja rozkładu źródeł (funkcja źródłowa)

Identyfikacja źródeł pola dla układu opisanego równaniem (1) polega na wyznaczeniu funkcji rozkładu źródeł  $f(x, y)$ , co stanowi rozwiązanie problemu odwrotnego. Aby rozwiązać ten problem numerycznie należy przybliżyć ciągły opis układu opisem dyskretnym. Po zamianie zmiennych ciągłych na dyskretny, np. w przypadku prostokątnej siatki podziału badanego obszaru o wymiarach  $l_x \times l_y$  według wzoru  $x = ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, M$ ,  $y = jh$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $M = l_x/h$ ,  $N = l_y/h$ ,  $h$  - długość kroku dyskretyzacji, i w wyniku przybliżenia równania różniczkowego równaniem różnicowym za pomocą schematu różnic skończonych uzyskuje się układ równań algebraicznych wiążących wartości funkcji polowej  $u$  i źródłowej  $f$  w węzłach siatki w następujący sposób [3]

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = h^2 f(i, j) = q_{i,j}, \quad i=1, 2, \dots, M-1, j=1, \dots, N-1, \quad (2)$$

gdzie:  $u_{i,j} = u(i, j)$ ,  $q_{i,j} = q(i, j)$ .

Warunki brzegowe przyjmują postać

$$\begin{aligned} u(0, j) &= U_0(j), & u(M, j) &= U_M(j), & j &= 0, 1, \dots, N \\ u(i, 0) &= U_0(i), & u(i, N) &= U_N(i), & i &= 0, 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Po rozwinięciu zarówno funkcji polowej jak i źródłowej w szeregi Fouriera, równanie (1) można przekształcić do postaci wiążącej współczynniki Fouriera  $U_m(k)$  i  $F_m(k)$

$$\frac{1}{h^2} \left[ (U_{m+1}(k) - 2U_m(k) + U_{m-1}(k)) - (4 \sin^2 \frac{k\pi}{2N}) U_m(k) \right] = F_m(k), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3)$$

z warunkami brzegowymi określonymi przez  $U_0(k) = 0$  oraz wartości  $U_M(k)$  wyznaczone z równości  $u_{M,n} = 0, n = 1, \dots, N$ .

Po podstawieniu monicznego wielomianu potęgowego  $P(q_k)$  (8) dla  $q_k = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2N}$  do równania (3), otrzymujemy rozwiązanie problemu prostego w postaci

$$U_m(k) = P_m(q_k)U_1(k) + \sum_{l=1}^{m-1} P_{m-l}(q_k)h^2 F_l(k), \quad m = 2, 3, \dots, M-1. \quad (4)$$

Wartości  $U_1(k)$  w równaniu (4) można wyznaczyć z warunków brzegowych. Dla  $N = M$  z układu  $M-1$  równań można wyznaczyć zestaw  $U_M(k), k = 1, 2, \dots, M-1$ . Następnie przez podstawienie tych współczynników do równania (4) dla  $m = M$ , można otrzymać zestaw  $U_1(k)$  dla  $k = 1, 2, \dots, M-1$ . Rozwiązanie problemu odwrotnego wyznaczone przy użyciu monicznych wielomianów potęgowych  $P(q_k)$  przyjmuje postać:

$$F_l(k) = \frac{U_{l+1}(k) - P_{l+1}(q_k)U_1(k) - \sum_{i=1}^{l-1} P_{l+1-i}(q_k)h^2 F_i(k)}{P_l(q_k)h^2}. \quad (5)$$

Funkcja źródłowa odtworzona ze współczynników (5) stanowi rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł pola. Ponieważ zagadnienie identyfikacji źródeł pola jest problemem odwrotnym, dlatego wyniki obliczeń należy ustabilizować [1]. Stabilność może zostać zapewniona przez zastosowanie odpowiedniej procedury regularyzacyjnej. Opracowana przez autorów artykułu Metoda Symulacyjna identyfikacji została uzupełniona przez specjalną numeryczną procedurę aproksymacyjną opracowaną na podstawie metody odwrotnych odległości [5].

### 3. PRZYPADEK DLA POMIARÓW TYLKO Z BRZEGU OBSZARU

Metoda identyfikacji źródeł wykorzystująca wielomiany potęgowe może zostać zaadaptowana dla przypadku posiadania wyników ograniczonych tylko do danych pomiarowych z brzegu badanego obszaru [6]. Zamiana zmiennych ciągłych na dyskretne

$$x = ih, \quad i = 0, 1, \dots, M+1, \quad y = jh, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (6)$$

umożliwia przybliżenie równania (1) równaniem różnicowym metodą różnic skończonych

$$u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j) + u(i, j+1) - 2u(i, j) + u(i, j-1) = h^2 f(i, j) = g(i, j), \quad (7)$$

gdzie funkcja  $g(i, j)$  oznacza zastępczą funkcję źródłową.

W zmiennych dyskretnych warunki brzegowe Dirichleta mają postać

$$\begin{aligned} u(0, j) &= U_0(j), & u(M+1, j) &= U_{M+1}(j), & j &= 0, 1, \dots, N \\ u(i, 0) &= U_0(i), & u(i, N) &= U_N(i), & i &= 0, 1, \dots, M, M+1. \end{aligned}$$

Przez wprowadzenie wielkości  $U(i)$  oraz  $G(i)$  oznaczających odpowiednio wektor wartości potencjałów oraz funkcji źródłowej w  $i$ -tej kolumnie siatki dla  $j = 1, 2, \dots, N-1$ , układ równań (7) wraz z warunkami brzegowymi można zapisać w postaci macierzowej

$$U(i+1) - (2E+A)U(i) + U(i-1) = G(i) - V_0(i) - V_N(i), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (8)$$

gdzie  $V_0(i)$  - wektor wartości potencjałów dla  $j=0$ ,  $V_N(i)$  - wektor wartości potencjałów dla  $j = N$  w  $i$ -tej kolumnie siatki,  $E$  - macierz jednostkowa,  $A$  - macierz aproksymacji różnicowej względem zmiennej  $j$ .

Wektory i macierze w równaniu (8) mają postać

$$G(i) = \begin{bmatrix} g(i,1) \\ g(i,2) \\ \dots \\ g(i, N-1) \end{bmatrix}, \quad V_0(i) = \begin{bmatrix} u(i,0) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_N(i) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ u(i, N) \end{bmatrix},$$

$$U(i) = \begin{bmatrix} u(i,1) \\ u(i,2) \\ \dots \\ u(i, N-1) \end{bmatrix}, \quad E = \text{diag} [1]_1^{N-1}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Macierz charakterystyczna  $B = 2E+A$ , pozwala wprowadzić do układu (8) macierzowe wielomiany potęgowe rodzaju  $P_n(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} A^k$ . Następnie eliminując nieznanne wartości potencjałów o indeksach  $i = 1, 2, \dots, M-1$ , otrzymujemy równanie

$$P_{M-1}(A) U_{M+1} - P_M(A) U_M + U_0 + H_{0N} = \sum_{i=1}^M P_{i-1}(A) G(i), \quad (9)$$

gdzie  $U_{M+1}$  - wektor znanych wartości potencjału na brzegu dla  $i = M+1$ ,  $U_M$  - wektorem wartości potencjału dla  $i = M$ ,  $U_0$  - wektorem znanych wartości potencjału dla  $i = 0$

$$U_{M+1} = \begin{bmatrix} u(M+1,1) \\ u(M+1,2) \\ \dots \\ u(M+1, N-1) \end{bmatrix}, \quad U_M = \begin{bmatrix} u(M,1) \\ u(M,2) \\ \dots \\ u(M, N-1) \end{bmatrix}, \quad U_0 = \begin{bmatrix} u(0,1) \\ u(0,2) \\ \dots \\ u(0, N-1) \end{bmatrix},$$

natomiast  $H_{0N} = H_0 + H_N$ , gdzie  $H_0$  jest wektorem znanych wartości potencjału dla  $j = 0$ , podobnie jak  $H_N$  dla  $j = N$ . Ponieważ potęgowe wielomiany moniczne  $P_n(A)$  tworzą wyrazy uzależnione od kolejnych potęg macierzy  $A$ , to porównując odpowiednie współczynniki z lewej i prawej strony równania (9) można wyznaczyć wszystkie wektory  $G(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , a tym samym otrzymać rozkład źródeł. Rozwiązanie wymaga jednak znajomości wartości potencjałów w węzłach kolumny sąsiadującej z brzegiem, tj.  $U_M$ . Gdy warstwa przy jednym brzegu nie jest dostępna dla pomiarów, wówczas wartości można uzyskać

przez przeskalowanie wektora potencjałów na brzegu przyjmując  $U_M = \alpha U_{M+1}$ , gdzie współczynnik skalowania  $\alpha > 1$ .

Równanie (9) można rozwiązać alternatywnym sposobem polegającym na wyjściu poza badany obszar o jedną kolumnę węzłów siatki traktując związane z nimi wartości potencjałów jako zerowe wartości brzegowe  $U_{M+2} = 0$ . Wówczas uwzględniając te wartości otrzymujemy rozwiązanie dla  $i = M+1$

$$U(M+2) - (2E + A)U(M+1) + U(M) + V_0(M+1) = G(M+2) = 0. \quad (10)$$

Wartości potencjałów w kolumnie sąsiadującej z brzegiem wyznaczamy w postaci

$$U(M) = (2E + A)U(M+1) - V_0(M+1). \quad (11)$$

Podstawieniu wyrażenia  $U_M = U(M)$  danego wzorem (11) do równania (10) daje

$$P_{M-1}(A) U_{M+1} - P_M(A) [(2E + A)U_{M+1} - V_{0,M+1}] + U_0 + H_{0N} = \sum_{i=1}^M P_{i-1}(A) G(i). \quad (12)$$

*Przykład 1*

W celu zilustrowania efektywności opracowanej metody identyfikacji wykonano obliczenia przyjmując  $M = 3$  i  $N = 3$ . Wówczas na podstawie równania (8) można skonstruować następujący układ równań

$$\begin{aligned} U(2) - (2E + A)U(1) + U(0) &= G(1) - V_0^3(1) \\ U(3) - (2E + A)U(2) + U(1) &= G(2) - V_0^3(2) \\ U(4) - (2E + A)U(3) + U(2) &= G(3) - V_0^3(3), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} U(0) &= \begin{bmatrix} u(0,1) \\ u(0,2) \end{bmatrix}, \quad U(1) = \begin{bmatrix} u(1,1) \\ u(1,2) \end{bmatrix}, \quad U(2) = \begin{bmatrix} u(2,1) \\ u(2,2) \end{bmatrix}, \quad U(3) = \begin{bmatrix} u(3,1) \\ u(3,2) \end{bmatrix}, \\ U(4) &= \begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix}, \quad V_0^3(1) = V_0(1) - V_3(1) = \begin{bmatrix} u(1,0) \\ u(1,3) \end{bmatrix}, \quad V_0^3(2) = V_0(1) - V_N(1) = \begin{bmatrix} u(2,0) \\ u(2,3) \end{bmatrix}, \\ V_0^3(2) &= V_0(1) - V_N(1) = \begin{bmatrix} u(3,0) \\ u(3,3) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ G(1) &= \begin{bmatrix} g(1,1) \\ g(1,2) \end{bmatrix}, \quad G(2) = \begin{bmatrix} g(2,1) \\ g(2,2) \end{bmatrix}, \quad G(3) = \begin{bmatrix} g(3,1) \\ g(3,2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Po wyeliminowaniu wektorów  $U(1)$ ,  $U(2)$  otrzymujemy następujące równanie

$$\begin{aligned} (3E+4A+A^2)U_4 - (4E+10A+6A^2+A^3)U_3 + U_0 + (3E+4A+A^4)U_{0,3}^3 + (2E + A)U_{0,1}^3 = \\ = (3E+4A+A^2)G_3 + (2E + A)G_2 + G_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1 = U(1), \quad U_2 = U(2), \quad U_3 = U(3), \quad U_4 = U(4), \quad G_1 = G(1), \quad G_2 = G(2), \quad G_3 = G(3), \\ V_{0,1}^3 = V_0^3(1), \quad V_{0,2}^3 = V_0^3(2), \quad V_{0,3}^3 = V_0^3(3). \end{aligned}$$

Po uporządkowaniu wyrazów i porównaniu współczynników przy tych samych potęgach  $A$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} 3U_4 + 4U_3 + U_0 + 3V_{0,3}^3 + 2V_{0,2}^3 + V_{0,1}^3 &= 3G_3 + 2G_2 + G_1 \\ 4U_4 - 10U_3 + 4V_{0,3}^3 + V_{0,2}^3 &= 4G_3 + G_2, \quad U_4 - 6U_3 + V_{0,3}^3 = G_3, \end{aligned}$$

skąd

$$G_1 = 14U_3 + U_0 + V_{0,1}^3, \quad G_2 = 14U_3 + V_{0,2}^3, \quad G_3 = U_4 - 6U_3 + V_{0,3}^3.$$

Podstawiając  $U_3 = \alpha U_4$  otrzymujemy

$$G_1 = 14\alpha U_4 + U_0 + V_{0,1}^3, \quad G_2 = 14\alpha U_4 + V_{0,2}^3, \quad G_3 = (1 - 6\alpha)U_4 + U_0 + V_{0,1}^3,$$

$$\begin{aligned} \text{gdzie } G_1 &= \begin{bmatrix} g(1,1) \\ g(1,2) \end{bmatrix} = 14\alpha \begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(0,1) \\ u(0,2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(1,0) \\ u(1,3) \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} g(2,1) \\ g(2,2) \end{bmatrix} = \\ &= 14\alpha \begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(2,0) \\ u(2,3) \end{bmatrix}, \quad G_3 = \begin{bmatrix} g(3,1) \\ g(3,2) \end{bmatrix} = (1 - 6\alpha) \begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(3,0) \\ u(3,3) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

#### Przykład 2

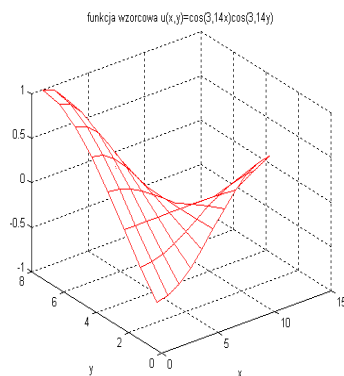
Ilustracja obliczeń według formuł wyprowadzonych w powyższym przykładzie dla połowej funkcji wzorcowej (*benchmark function*) w postaci:

$$u_1(x, y) = \cos \pi x \cos \pi y, \quad \text{dla } x \in (0, 1), y \in (0, 1)$$

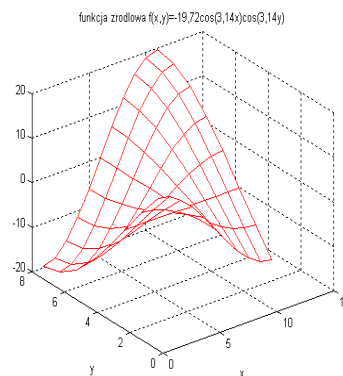
z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \cos \pi y, & u(x, 0) &= \cos \pi x, \\ u(1, y) &= -\cos \pi y, & u(x, 1) &= -\cos \pi x. \end{aligned}$$

Rozwiązując analitycznie równanie Poissona dla funkcji wzorcowej  $u_1(x, y)$  można otrzymać funkcję źródłową w postaci  $f_1(x, y) = -2\pi^2 \cos \pi x \cos \pi y$ . Rozwiązując analitycznie równanie Poissona dla funkcji wzorcowej  $u_1(x, y)$  można otrzymać funkcję źródłową w postaci  $f_1(x, y) = -2\pi^2 \cos \pi x \cos \pi y$ .



Rys. 1. Funkcja wzorcowa  $u_1$



Rys. 2. Funkcja źródłowa wzorcowa  $f_1$

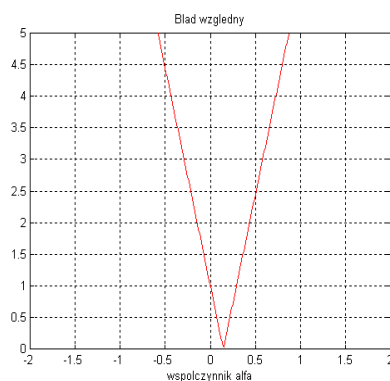
Dla kroku dyskretyzacji  $h = 0,25$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\cos(\frac{\pi}{4}) \\ -\cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0,1) \\ u(0,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} u(1,0) \\ u(1,3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{3\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} u(2,0) \\ u(2,3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{3\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(3,0) \\ u(3,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{3\pi}{4}) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{3\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}_1 &= \begin{bmatrix} g(1,1) \\ g(1,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}(7\alpha+1) \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} g(2,1) \\ g(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}(7\alpha+1) \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} g(3,1) \\ g(3,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}\alpha \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wartość współczynnika  $\alpha$  można oszacować z analizy błędu względnego.

Dla  $f(3, 1) = \frac{1}{h^2} \alpha 3\sqrt{2} = 48\sqrt{2}\alpha$  rozwiązanie analityczne wynosi  $f_a\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \pi^2$ .

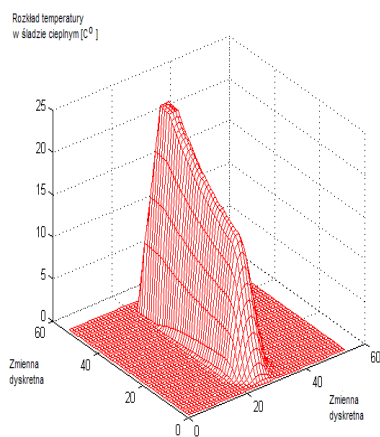
$$\text{Błąd względny } \delta(\alpha) = \frac{\left| f(3,1) - f_a\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \right|}{f_a\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)} = \left| \frac{48\sqrt{2}\alpha}{\pi^2} - 1 \right| = |6,88\alpha - 1|.$$



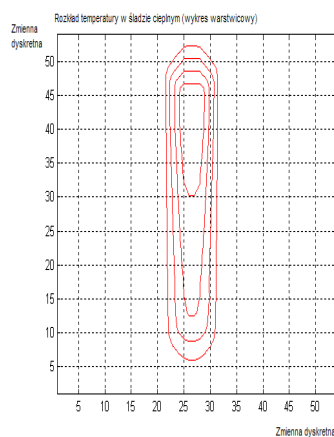
Rys. 3. Wykres błędu względnego  $\delta(\alpha)$

#### 4. ZASTOSOWANIA W ZAGADNIENIU UKŁADU POJAZD SZYNOWY - TOR

Metody identyfikacji źródeł pola mogą być użyteczne w badaniu zagadnień przepływu ciepła. Jeśli rozpatrywane zagadnienie przepływu ciepła można sprowadzić do opisu równaniem Poisson'a, wówczas w opisie zagadnienia wzorem (1) należy uwzględnić, że funkcją poławą jest funkcja rozkładu temperatury  $T(x, y)$  opisująca pole temperatury wewnątrz badanego obszaru. Wykorzystując opracowaną Metodę Symulacyjną zbadano zagadnienie cieplne dla układu koło-szyna i dokonano identyfikacji źródeł ciepła śladu cieplnego w szynie kolejowej spowodowanego kontaktem tocznym koło - szyna [6]. Jako dane wejściowe przyjęto rozkłady temperatury w śladzie cieplnym na powierzchni tocznej szyny wyznaczone z badań modelowych przewodzenia i wymiany ciepła w szynie przeprowadzonych przez zespół kierowany przez prof. J. Piotrowskiego z Politechniki Warszawskiej [2]. Przykładowe rozkłady temperatury w śladzie cieplnym w szynie przedstawiono na rys. 4 i rys.5.



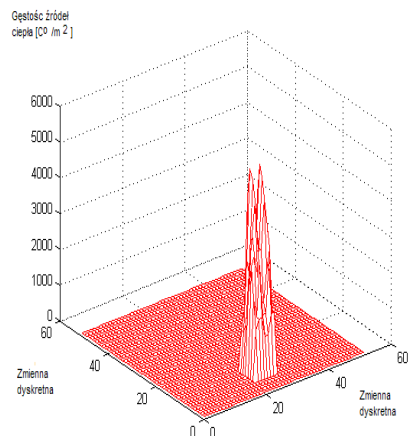
Rys. 4. Rozkład temperatury w śladzie cieplnym.



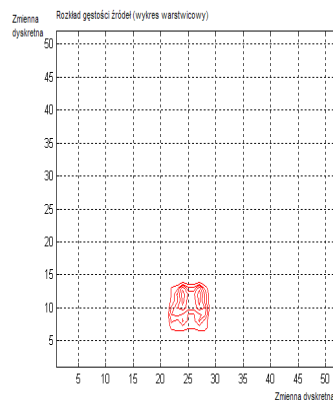
Rys. 5 Wykres warstwiczny.

Natomiast wyniki obliczeń wykonanych przy pomocy Metody Symulacyjnej w formie rozkładów gęstości źródeł zilustrowano na rys. 6 i rys.7





Rys. 6. Wyznaczona funkcja źródłowa.



Rys. 7. Wykres warstwiczny.

Identyfikacja źródeł w śladzie cieplnym w szynie wywołanym kontaktem tocznym koło-szyna może posłużyć do identyfikacji parametrów układu dynamicznego tor-pojazd szynowy umożliwiającą weryfikację cech mechanicznych kontaktu oraz wyznaczenie lokalnych naprężeń, poślizgów, gęstości mocy tarcia [7]. Ponieważ kontakt toczny koło - szyna wywołuje skutki cieplne na powierzchni szyny, zatem można wyznaczyć wielkości mechaniczne wywołujące obserwowane pole temperatury. Inaczej zagadnienie to można sformułować w następujący sposób: badanie kontaktu tocznego koło - szyna przy zastąpieniu modelu mechanicznego przez model cieplny kontaktu.

## 5. MODELOWANIE DYNAMIKI KONTAKTU KOŁO - SZYNA

Pojęcie energii jednookresowej stosowane jest w analizie w czasie rzeczywistym procesów energetycznych w obwodach elektrycznych [9] w stanie okresowym niesinusoidalnym. Procesy energetyczne można wówczas badać na płaszczyźnie fazowej energii oraz oceniać je na podstawie zmian chwilowego napięcia i prądu związanych z danym elementem obwodu w ciągu jednego okresu. Biorąc pod uwagę dwójnik dynamiczny działający w stanie okresowym niesinusoidalnym, dla którego sygnałem wymuszenia będzie napięcie  $v(t) = v(t + T)$ ,  $T$  - okres, a odpowiedzią prąd  $i(t) = i(t + T)$ , energię oddaną przez źródło  $v(t)$  do odbiornika w przedziale czasu  $\Delta t = nT$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , określamy wyrażeniem

$$W(\Delta t) = nW_T, \quad (13)$$

gdzie:  $W_T$  oznacza energię jednookresową, tzn. energię dostarczoną do odbiornika podczas jednego okresu wymuszenia i odpowiedzi.

Zatem w stanie okresowym niesinusoidalnym wyznaczenie energii pobranej ze źródła przez odbiornik w danym przedziale czasu  $\Delta t = nT$  można sprowadzić do określenia energii jednookresowej  $W_T$ , a następnie pomnożenia przez  $n$ . Dla badanego zagadnienia  $W_T$  wynosi

$$W_T = \int_0^T v(t)i(t)dt = \int_0^T v(t) \frac{d}{dt} \left( \int i(\tau)d\tau \right) dt = \int_{q(0)}^{q(T)} v(t)dq(t) = \int_{\psi(0)}^{\psi(T)} i(t)d\psi(t), \quad (14)$$

gdzie:  $q(t) = \int i(t)dt$  oznacza ładunek, a  $\psi(t) = \int v(t)dt$  - strumień magnetyczny źródła.

Z postaci wyrażenia (14) wynika, że pole powierzchni ograniczonej pętlą na fazowej płaszczyźnie energii o współrzędnych  $(v(t), q(t))$  lub równoważnie  $(\psi(t), i(t))$  określa energię jednookresową  $W_T$  pobraną przez odbiornik ze źródła, gdy współdziałają one w stanie okresowym niesinusoidalnym.

Rozpatrując kontakt koło-szyna w płaszczyźnie pionowej można zauważyć, że na szynę ze strony koła działa pionowa siła nacisku mająca charakter sygnału okresowego

$$F(t) = f(t + T), \quad (15)$$

gdzie: okres  $T$  odpowiada przedziałowi czasu do przyjechania koła w następnym wagonie,  $T = \Delta x/v$ ,  $v$  - prędkość wzdłuż toru.

W płaszczyźnie pionowej prostopadłej do szyny układ dynamiczny kontaktu tocznego można opisać następującym układem równań

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y_1}{dt^2} + b_1 \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} + k_1(y_1 - y_2) &= 0 \\ M \frac{d^2 y_2}{dt^2} + b_2 \frac{d(y_2 - y_1)}{dt} + k_2(y_2 - y_1) &= F(t) \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie: zmienne  $y_1 = y_1(t)$ ,  $y_2 = y_2(t)$ ,  $m$ ,  $b_1$ ,  $k_1$  związane są z podkładem, a  $M$ ,  $b_2$ ,  $k_2$  z szyną.

Korzystając z koncepcji badania procesów energetycznych na fazowej płaszczyźnie energii, energię jednookresową dla badanego przypadku można w oparciu o wzór (14) przedstawić następującą zależnością

$$W_T = \int_0^T F w dt = \int_{y(0)}^{y(T)} F dy_2, \quad w = \frac{dy_2}{dt}. \quad (17)$$

Z postaci wyrażenia (33) wynika, że pole powierzchni ograniczonej pętlą na fazowej płaszczyźnie energii o współrzędnych  $(F(t), y_2(t))$  określa energię  $W_T$  przekazaną w jednym okresie. Korzystając analogii z opisem obwodu elektrycznego, siła  $F(t)$  odpowiada wymuszeniu, czyli napięciu źródłowemu  $v(t)$ , a zmienna przemieszczenia  $y(t)$  - chwilowemu ładunkowi  $q(t)$  płynącemu w obwodzie.

## 6. WNIOSKI

W pracy przedstawiono efektywne metody identyfikacji źródeł pól użyteczne modelowaniu wybranych zagadnień wkładu pojazd szynowy – tor. W ten kierunek badań wpisuje się też przedstawiona w pracy metoda modelowania dynamiki kontaktu koło-szyna dla siły wertykalnej skonstruowana w oparciu o pojęcie energii jednookresowej stosowane w badaniu obwodów elektrycznych.

## 7. LITERATURA

- [1] Groetsch Ch. W.: *Inverse Problems in Mathematical Sciences*. Braunschweig/ Wiebaden, Vieweg 1992.
- [2] Nagórski Z., Piotrowski J.: Modelowanie pola temperatury w szynie wywołanego toczaniem się koła. *Zeszyty Instytutu Pojazdów Politechniki Warszawskiej* 4(39), 2000.
- [3] Potter D.: *Metody obliczeniowe fizyki*. Warszawa, PWN 1977.
- [4] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Application of inverse problems modelling to design and utilize rail vehicles. *Proc. International Conference on Transport of the 21st Century*, Stare Jabłonki, September 2007, Vol. 2, pp. 169-174.
- [5] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: The Simulation Method used to solve engineering inverse problems. *Proc. 6th Vienna Intern. Conf. on Mathematical Modelling MATHMOD9*, Vienna, Feb. 2009, Full Papers CD Volume, Argesim Report No. 35.
- [6] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Modelowanie kontaktu koło-szyna. *Logistyka* 6/2009.
- [7] E. Rydygier, Z. Strzyżakowski: Application of numerical methods of field sources identification to selected issues in rail vehicle – track systems. *Prace Naukowe PW, Transport*, Z. 71/2009, pp. 196-205.
- [8] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Efektywne metody modelowania użyteczne w eksploatacji pojazdów szynowych. *Logistyka* 2/2010, dział „Logistyka Nauka”.
- [9] Trzaska Z.: *Analiza i projektowanie obwodów elektrycznych*. Ofic. Wyd. P.W. 2008.