

Wacław SZCZEŚNIAK<sup>1</sup>  
Magdalena ATAMAN<sup>1</sup>

## MAŁE DRGANIA KRĄŻKA W RUCHOMEJ OBRĘCZY ELIPTYCZNEJ

*W pracy przeanalizowano małe drgania sztywnego krążka w ruchomej sztywnej obręczy eliptycznej. Do wyprowadzenia równań ruchu rozważanego układu, który ma dwa stopnie swobody, zastosowano metodę równań Lagrange'a drugiego rodzaju. Ze względu na nieliniowy charakter równań ruchu rozwiązano je numerycznie. Analizowano różne warunki początkowe zadania. Wyniki rozwiązania zilustrowano rysunkami.*

## SMALL VIBRATIONS OF ROLLER IN MOVING ELLIPTIC HOOP

*In the paper vibrations of rigid roller in moving elliptic hoop are analysed. Equations of motion of analysed system are derived using Lagrange's equations. Obtained two nonlinear equations are solved numerically using "Mathematica". Various initial conditions are taken into account. Some figures illustrate obtained solutions.*

### 1. WSTĘP

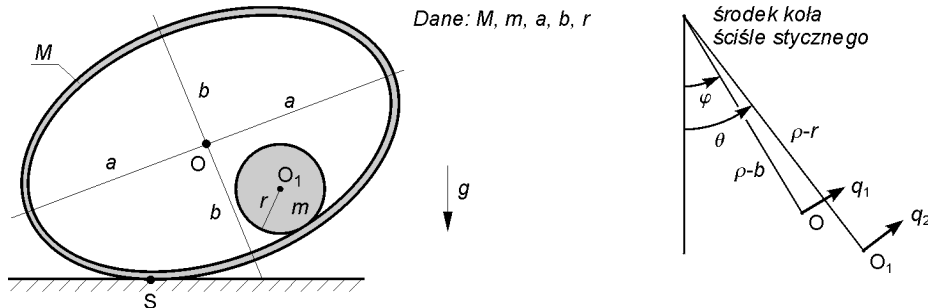
Przedmiotem pracy są małe drgania sztywnego krążka w ruchomej sztywnej obręczy eliptycznej. Korzystając z metody równań Lagrange'a drugiego rodzaju wyprowadzono nieliniowe równania ruchu rozważanego układu, który ma dwa stopnie swobody. Ze względu na nieliniowy charakter równań ruchu rozwiązano je numerycznie. Wyniki rozwiązania przedstawiono na rysunkach.

### 2. RÓWNANIA RUCHU KRĄŻKA W RUCHOMEJ OBRĘCZY ELIPTYCZNEJ NA SZTYWNYM PODŁOŻU

Rozważamy układ złożony z cienkiego pierścienia eliptycznego o grubości powłoki  $e$ , masie całkowitej  $M$  oraz o półosiach  $a$  i  $b$ . Wewnątrz pierścienia porusza się bez poślizgu sztywny krążek o masie całkowitej  $m$  i promieniu  $r$ . Obręcz jest w ruchu płaskim na chropowatym podłożu, a krążek w ruchu złożonym. W zadaniu wykluczamy poślizg obręczy i krążka. Układ ma dwa stopnie swobody. Do rozwiązania zadania zastosujemy metodę równań Lagrange'a drugiego rodzaju.

---

<sup>1</sup> Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16,  
tel.: +48 22 234 65 07, e-mail: w.szczesniak@il.pw.edu.pl;  
tel.: +48 22 234 64 70, e-mail: m.ataman@il.pw.edu.pl;



Rys. 1. Schemat dynamiczny obręczy eliptycznej ze sztywnym krążkiem

Przyjmując za współrzędne uogólnione kąt obrotu obręczy  $\varphi = \varphi(t)$  oraz kąt obrotu krążka  $\theta = \theta(t)$ , możemy zapisać następujące równanie więzów:

$$q_1 = (\rho - b)\varphi = \left(\frac{a^2}{b} - b\right)\varphi, \quad q_2 = (\rho - r)\theta = \left(\frac{a^2}{b} - r\right)\theta, \quad \alpha = \frac{\theta}{\varphi} \left(\frac{a^2}{b} - r\right), \quad (1)$$

gdzie:  $\varphi$  jest małym kątem pomiędzy promieniami krzywizny  $\rho = \frac{a^2}{b}$  w położeniu początkowym pionowym i aktualnym,

$\theta$  jest małym kątem pomiędzy położeniem początkowym pionowym krążka a położeniem aktualnym,

$q_1$  oraz  $q_2$  są przemieszczeniami środka elipsy i środka krążka prostopadłymi do aktualnych ich osi obrotu.

Krążek jest w ruchu złożonym, a kwadrat prędkości w jego środku  $O_1$  wyznaczamy następująco:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2, & v_1 &= (\rho - b) \dot{\varphi} = \left(\frac{a^2}{b} - b\right) \dot{\varphi}, & v_2 &= (\rho - r) \dot{\theta} = \left(\frac{a^2}{b} - r\right) \dot{\theta}, \\ v^2 &= v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos(\theta - \varphi) = \left[\left(\frac{a^2}{b} - b\right) \dot{\varphi}\right]^2 + \left[\left(\frac{a^2}{b} - r\right) \dot{\theta}\right]^2 + \\ &+ 2\left(\frac{a^2}{b} - b\right) \dot{\varphi} \left(\frac{a^2}{b} - r\right) \dot{\theta} \cos(\theta - \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

Dwa równania Lagrange'a drugiego rodzaju zapisujemy we współrzędnych uogólnionych  $\varphi$  i  $\theta$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \quad (3)$$

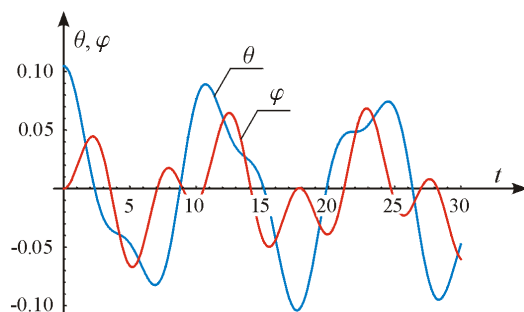
Energię kinetyczną i potencjalną układu opisują następujące wzory:

$$\begin{aligned}
J_S = J_O + M b^2 &= M \frac{a^2 + 2 a b + 5 b^2}{4}, & J_O &= M \frac{(a + b)^2}{4}, & J_{O_1} &= \frac{1}{2} m r^2, \\
A &= \pi e(a + b), & M &= \tilde{\rho} A = \tilde{\rho} \pi e (a + b), \\
E_k &= \frac{1}{2} J_S \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_{O_1} \dot{\alpha}^2 = \\
&= \frac{1}{8 b^2} \{ [M b^2 (a^2 + 2 a b + 5 b^2) + 4 m (a^2 - b^2)^2] \dot{\varphi}^2 + m [6 (a^2 - b r)^2 \dot{\theta}^2 + \\
&\quad + 8 (a^2 - b^2)(a^2 - b r) \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi)] \}, \\
V &= M g \left( \frac{a^2}{b} - b \right) (1 - \cos \varphi) + m g \left( \frac{a^2}{b} - r \right) (1 - \cos \theta).
\end{aligned} \tag{4}$$

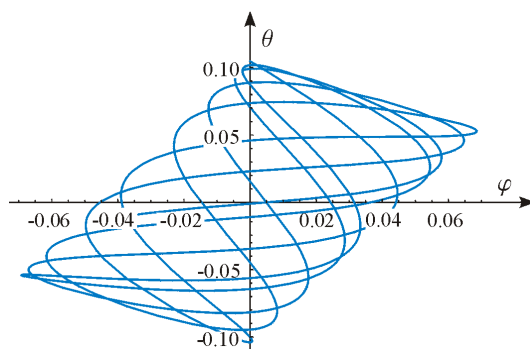
Wstawiając wyrażenia na energię kinetyczną i potencjalną (4) do równań Lagrange'a (3) otrzymujemy ostatecznie dwa następujące nieliniowe równania ruchu:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4 b^2} \{ [4 m (a^2 - b^2)^2 + M b^2 (a^2 + 2 a b + 5 b^2)] \ddot{\varphi} + \\
&+ 4 (a^2 - b^2) \{ M g b \sin \varphi - m (a^2 - b r) [\dot{\theta}^2 \sin(\varphi - \theta) + \ddot{\theta} \cos(\theta - \varphi)] \} \} = 0, \\
&\frac{m}{2 b^2} (a^2 - b r) [2 b g \sin \theta + 2 (a^2 - b^2) \dot{\varphi}^2 \sin(\theta - \varphi) + 3 (a^2 - b r) \ddot{\theta} + \\
&\quad + 2 (a^2 - b^2) \ddot{\varphi} \cos(\theta - \varphi)] = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

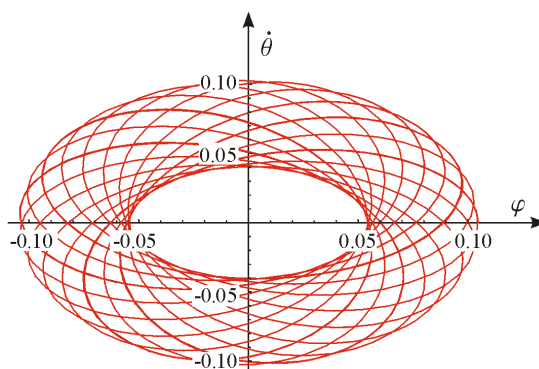
Równania (5) rozwiązujemy numerycznie pakietem Mathematica z wykorzystaniem instrukcji NDSolve. Do obliczeń przyjmujemy następujące dane liczbowe:  $M = 100$  kg,  $m = 50$  kg,  $a = 10$  m,  $b = 5$  m,  $r = 2$  m,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>. Zadanie rozwiązano przy różnych warunkach początkowych obreńczy i krążka. Na rysunkach 2 – 7 przedstawiono niektóre wykresy uzyskane na podstawie obliczeń. Na rysunku 2 pokazano przemieszczenia katowe  $\varphi(t)$  i  $\theta(t)$  obreńczy i krążka w czasie od zera do 30 sekund, przy warunkach początkowych:  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = \pi/30$  oraz  $\dot{\theta}(0) = 0$ . Rysunek 3 przedstawia trajektorie kątów  $\theta$  i  $\varphi$  przy takich samych warunkach początkowych. W przypadku gdy  $\varphi(0) = \pi/30$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$  i  $\dot{\theta}(0) = 0$  pokazano portrety fazowe we współrzędnych  $\varphi$  i  $\dot{\varphi}$  (rysunek 4) oraz współrzędnych  $\theta$  i  $\dot{\theta}$  (rysunek 5). Dwa ostatnie wykresy wykonano przy warunkach początkowych:  $\varphi(0) = \pi/30$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = \pi/20$  oraz  $\dot{\theta}(0) = 0$ . Rysunek 6 przedstawia portret fazowy we współrzędnych  $\varphi$  i  $\dot{\varphi}$ , natomiast na rysunku 7 pokazano portret fazowy we współrzędnych  $\theta$  i  $\dot{\theta}$ .



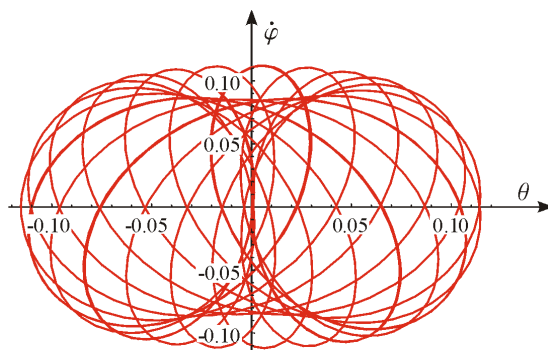
Rys. 2. Przebiegi w czasie kątów  $\theta$  i  $\varphi$  w czasie 30 sekund przy warunkach początkowych  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = \pi/30$  oraz  $\dot{\theta}(0) = 0$



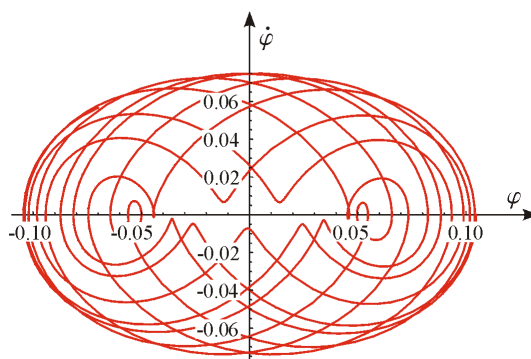
Rys. 3. Trajektoria kątów  $\varphi$  i  $\theta$  w czasie 30 sekund przy warunkach początkowych  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = \pi/30$  oraz  $\dot{\theta}(0) = 0$



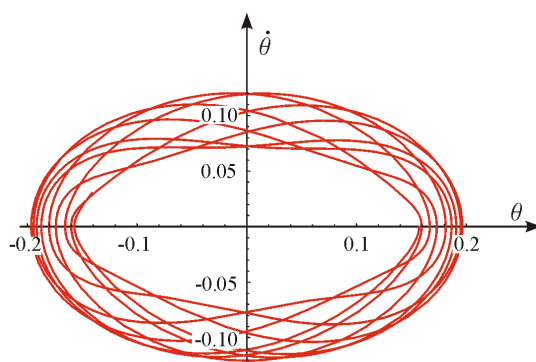
Rys. 4. Portret fazowy we współrzędnych  $\varphi$  i  $\dot{\theta}$  przy warunkach początkowych  $\varphi(0) = \pi/30$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$  i  $\dot{\theta}(0) = 0$



Rys. 5. Portret fazowy we współrzędnych  $\theta$  i  $\dot{\varphi}$  przy warunkach początkowych  $\varphi(0) = \pi/30$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$  i  $\dot{\theta}(0) = 0$



Rys. 6. Portret fazowy we współrzędnych  $\varphi$  i  $\dot{\varphi}$  przy warunkach początkowych  $\varphi(0) = \pi/30$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = \pi/20$  oraz  $\dot{\theta}(0) = 0$



Rys. 7. Portret fazowy we współrzędnych  $\theta$  i  $\dot{\theta}$  przy warunkach początkowych  $\varphi(0) = \pi/30$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = \pi/20$  oraz  $\dot{\theta}(0) = 0$

### 3. WNIOSKI

W przeciwieństwie do małych drgań sztywnego walca eliptycznego, walca osłabionego otworem oraz krążka z otworem, przeanalizowanych w pracy [7], w przypadku sztywnego krążka w ruchomej sztywnej obręczy eliptycznej nie istnieje ściśle rozwiązanie analityczne. Rozważany w tej pracy układ składający się z ruchomej obręczy eliptycznej z krążkiem ma dwa stopnie swobody, a jego równania ruchu są nieliniowe. Z tego względu rozwiązanie wyprowadzonych równań możliwe jest jedynie na drodze numerycznej.

### 4. LITERATURA

- [1] Szczesniak W.: *Dynamika teoretyczna w zadaniach dla dociekliwych*. OW PW, Warszawa 2010.
- [2] Szczesniak W.: *Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych*. OW PW, Warszawa 2007.
- [3] Szczesniak W.: *Dynamika analityczna i <<MATHEMATICA>>*. OW PW, Warszawa 2005.
- [4] Szczesniak W., Ataman M.: *Modelowanie dynamiczne cieczy w cysternie za pomocą układu „obręcz-kula”*. *Drgania poprzeczne*. 11<sup>th</sup> International Conference „Computer Systems Aided Science, Industry and Transport”, Transcomp 2007, Vol. 2, Zakopane 2007, pp. 277-282.
- [5] Szczesniak W., Ataman M.: *Modelowanie dynamiczne cieczy w cysternie za pomocą układu „obręcz-kula”*. *Drgania obrotowe*. 11<sup>th</sup> International Conference „Computer Systems Aided Science, Industry and Transport”, Transcomp 2007, Vol. 2, Zakopane 2007, pp. 283-287.
- [6] Szczesniak W., Ataman M., Kwaśniewski L.: *Dynamic analysis of liquid motion in a tank using hoop and ball method with damping*. *Computer Systems Aided Science and Engineering Work in Transport, Mechanics and Electrical Engineering*. Monograph No122, Radom 2008, pp. 517-522.
- [7] Szczesniak W., Ataman M.: *Drgania własne sztywnego cylindra eliptycznego*. VII Konferencja Naukowo-Techniczna „Logistyka, Systemy Transportowe, Bezpieczeństwo w Transporcie” Logitrans 2010, ibid.
- [8] Hand L.M., Finch J.D.: *Analytical mechanics*. Cambridge University Press 1998.
- [9] Gutowski R.: *Mechanika analityczna*. PWN, Warszawa 1971.
- [10] Pjatnicki E.S. i inni: *Sbornik zadacz po analiticheskoj miechanikie*. Nauka-Fizmatlit. Moskwa 1980 i 1996.
- [11] Nagórski R., Szczesniak W.: *Mechanika teoretyczna, t. 1-2*. OW PW, Warszawa 1993.
- [12] Szczesniak W., Ataman M.: *Analiza nieliniowego równania ruchu wahadła cykloidalnego Ch. Huygensa*. *Prace Naukowe Politechniki Radomskiej, Transport* nr 3(23), 2005, str. 485-490.
- [13] Szczesniak W., Ataman M.: *Swobodne drgania nieliniowe sztywnej tarczy półkolistej oraz półobręczy na sztywnym podłożu*. *Prace Naukowe Politechniki Radomskiej, Transport* nr 3(23), 2005, str. 491-498.