

*drżania własne sztywnego cylindra eliptycznego,
walec eliptyczny z otworem kołowym,
drżania krążka wewnątrz powłoki walca eliptycznego*

Wacław SZCZEŚNIAK¹
Magdalena ATAMAN¹

DRGANIA WŁASNE SZTYWNEGO CYLINDRA ELIPTYCZNEGO

W pracy przeanalizowano drżania własne pełnego, sztywnego walca eliptycznego na sztywnym podłożu oraz walca eliptycznego z okrągłym otworem. Rozważano również małe drżania sztywnego krążka wewnątrz sztywnej powłoki w kształcie cylindra eliptycznego. Wyznaczono równania ruchu małych drgań własnych tych układów, określono częstości kołowe i okresy drgań. Do wyprowadzenia równań zastosowano metodę zachowania energii mechanicznej, jako najbardziej skuteczną i szybką w takich zadaniach. W końcu opracowania omówiono ruch cylindra eliptycznego po równi pochyłej.

FREE VIBRATIONS OF RIGID CYLINDROID

In the paper free vibrations of rigid cylindroid on the rigid horizontal surface and cylindroid with circular hole are analysed. Vibrations of rigid pulley in cylindroid shell is considered also. Equations of motion of analysed systems are derived using the method of conservation of mechanical energy. This method is the most efficient for solving such problems. At the end of the paper Plane motion of cylindroid on inclined plane is presented.

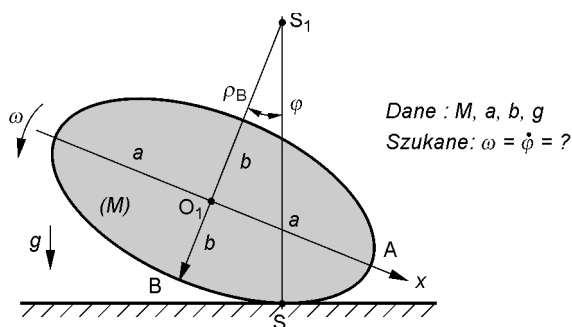
1. WSTĘP

Elipsa i elipsoida mają szczególne znaczenie i zastosowanie w szeroko rozumianej mechanice teoretycznej i technicznej. Takie pojęcia jak elipsa i elipsoida bezwładności, elipsoida naprężeń czy odkształceń, równanie cząstkowe typu eliptycznego są zawsze związane z elipsą lub elipsoidą. Przedmiotem rozważań w niniejszej pracy są drżania własne pełnego, sztywnego walca eliptycznego na sztywnym podłożu rys.1. Walec może mieć również okrągły otwór – inkluzję jak na rysunku 2.

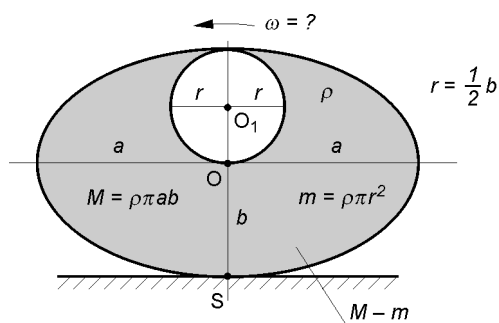
Rozważymy również małe drżania sztywnego krążka wewnątrz sztywnej powłoki w kształcie cylindra eliptycznego. W pracy wyznaczymy równania ruchu małych drgań własnych tych układów, określimy częstości kołowe i okresy drgań. Zastosujemy metodę zachowania energii mechanicznej, jako najbardziej skuteczną i szybką w takich zadaniach. W końcu opracowania wskażemy na drżania wymuszone, przytaczając równania ruchu

¹ Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16,
tel.: +48 22 234 65 07, e-mail: w.szczesniak@il.pw.edu.pl;
tel.: +48 22 234 64 70, e-mail: m.ataman@il.pw.edu.pl;

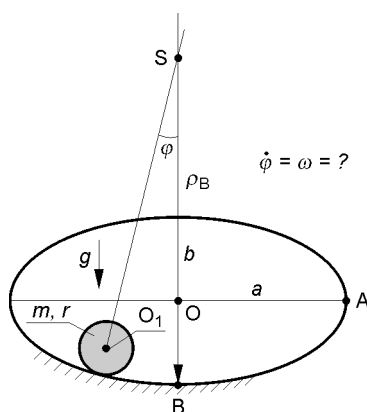
w dwóch zadaniach. Praca jest małym fragmentem opracowania książkowego W. Szcześniaka, pt. „Dynamika teoretyczna dla dociekliwych” OWPW, Warszawa 2010.



Rys. 1. Schemat dynamiczny sztywnego walca eliptycznego na sztywnym podłożu; małe drgania własne dookoła położenia równowagi statycznej



Rys.2. Małe drgania walca eliptycznego z otworem kołowym



Rys. 3. Małe drgania sztywnego krążka wewnątrz sztywnej powłoki walca eliptycznego

2. DRGANIA WŁASNE SZTYWNEGO, PEŁNEGO WALCA

Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 1, walec eliptyczny o masie całkowitej M i półosiach odpowiednio większej i mniejszej a i b spoczywa na chropowatej poziomej płaszczyźnie. Celem naszym w tym rozdziale będzie wyznaczenie częstości kołowej walca i okresu małych drgań własnych dookoła położenia równowagi statycznej. Zakładamy brak poślizgu walca względem nieodkształcalnego, chropowatego, poziomego podłoża. Elipsa jako spłaszczone koło jest złożeniem czterech wycinków okręgów ściśle stycznych jak na rysunku 4. Okręgi mają promienie dwa większe $\rho_A = \frac{a^2}{b}$ oraz dwa mniejsze $\rho_B = \frac{b^2}{a}$. Walec eliptyczny jest w ruchu płaskim, a jego środek O , przy małych drganiach przemieszcza się po okręgu o promieniu $\rho_B - b$. Interpretację geometryczną promieni ρ_A oraz ρ_B pokazano na rysunku 6. Zatem zgodnie z oznaczeniami na rysunkach 5 i 6 środek masy walca jest w małym chwilowym ruchu obrotowym dookoła punktu S_1 opisanym współrzędną uogólnioną $\varphi = \varphi(t)$. Masowy moment bezwładności walca względem osi prostopadłej do rysunku i przechodzącej przez środek masy elipsy O , w przypadku małych drgań można przyjąć, że nie zależy od współrzędnej uogólnionej φ . Zatem, momenty bezwładności względem osi prostopadłych do rysunku 1 oraz przechodzących przez punkty O i S , który jest chwilowym środkiem obrotu wynoszą odpowiednio:

$$J_O = M \frac{a^2 + b^2}{4}, \quad J_S = J_O + M b^2 = \frac{1}{4} M (a^2 + 5 b^2). \quad (1)$$

W przypadku małych drgań dookoła położenia równowagi statycznej walca, energia kinetyczna i potencjalna w funkcji kąta $\varphi = \varphi(t)$ wynoszą odpowiednio:

$$E_k = \frac{1}{2} J_S (\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2} M \frac{a^2 + 5 b^2}{4} (\dot{\varphi})^2, \quad \varphi = \varphi(t), \quad (2)$$

$$E_p = V = M g (\rho_B - b) (1 - \cos \varphi), \quad \rho_B = \frac{b^2}{a}.$$

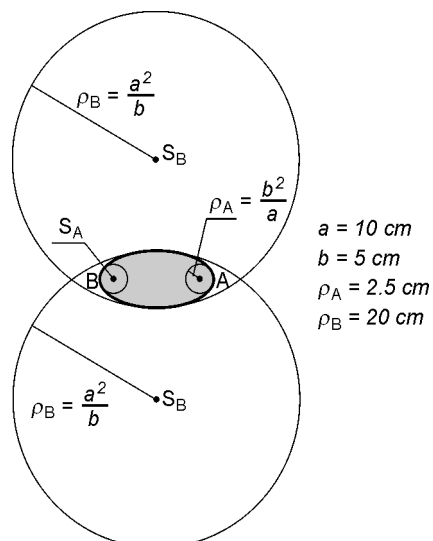
Celem znalezienia równania ruchu zastosujemy klasyczną metodę energetyczną. Mamy, zatem:

$$\frac{d}{dt} (E_k + V) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} M \frac{a^2 + 5 b^2}{4} (\dot{\varphi})^2 + M g (\rho_B - b) (1 - \cos \varphi) \right] = 0,$$

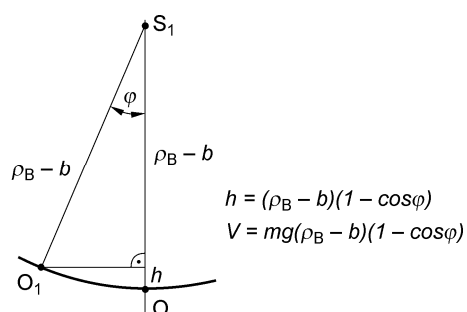
$$\left[(a^2 + 5 b^2) \ddot{\varphi} + 4 g \left(\frac{a^2}{b} - b \right) \sin \varphi \right] \dot{\varphi} = 0, \quad \sin \varphi \cong \varphi, \quad \dot{\varphi} \neq 0, \quad (3)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{4 g (a^2 - b^2)}{b(a^2 + 5 b^2)} \varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{4 g (a^2 - b^2)}{b(a^2 + 5 b^2)}, \quad \omega = 2 \sqrt{\frac{g (a^2 - b^2)}{b(a^2 + 5 b^2)}}$$

$$T = \frac{2 \pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{b(a^2 + 5 b^2)}{g (a^2 - b^2)}}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{g (a^2 - b^2)}{b(a^2 + 5 b^2)}}.$$



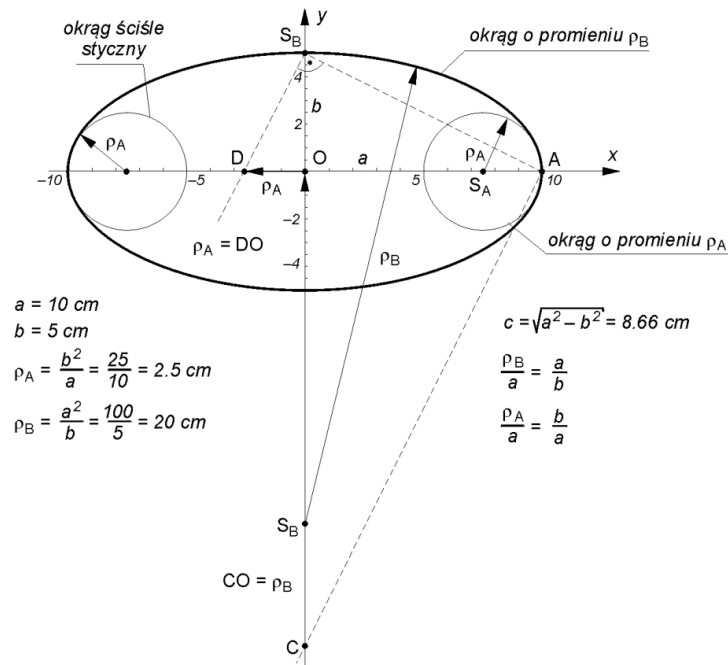
Rys. 4. Elipsa i jej cztery okręgi ściśle styczne o promieniach odpowiednio $\rho_A = \frac{a^2}{b}$
oraz $\rho_B = \frac{b^2}{a}$



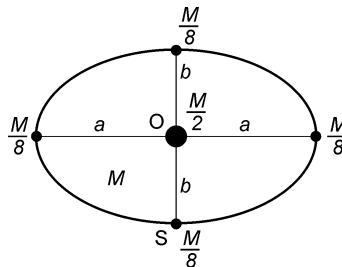
Rys. 5. Współrzędna uogólniona $\varphi = \varphi(t)$ oraz wysokość h w wyrażeniu na energię potencjalną

Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 7 zastępczy schemat mas skupionych w walcu eliptycznym do wyznaczenia dowolnego masowego momentu bezwładności składa się z pięciu mas skupionych. Zatem, alternatywnie momenty bezwładności J_O oraz J_S wyznaczamy z dyskretnego schematu zastępczego w następujący sposób:

$$J_O = 2 \frac{M}{8} a^2 + 2 \frac{M}{8} b^2 = M \frac{a^2 + b^2}{4}, \quad J_S = J_O + M b^2 = M \frac{a^2 + 5 b^2}{4}. \quad (4)$$



Rys. 6. Interpretacja geometryczna promieni $\rho_A = \frac{a^2}{b}$ oraz $\rho_B = \frac{b^2}{a}$



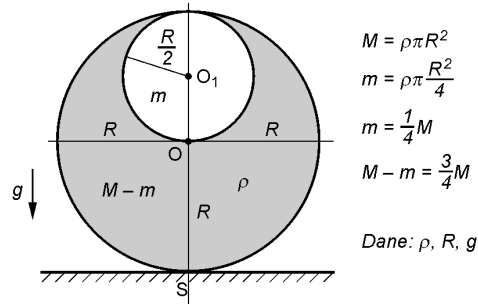
Rys. 7. Interpretacja zastępczego masowego momentu bezwładności modelowanego masami dyskretnymi

3. MAŁE DRGANIA WŁASNE KRAŻKA I WALCA ELIPTYCZNEGO Z OTWORAMI KOŁOWYMI

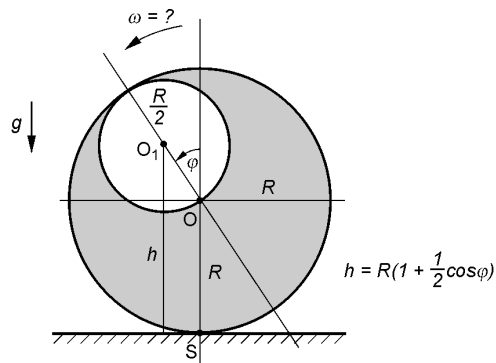
W tym rozdziale, w pierwszej kolejności rozważymy małe drgania własne sztywnego krążka o gęstości masy ρ , masie całkowitej M i promieniu R . W krążku, jak na rysunku 8, wycięto otwór kołowy o promieniu $\frac{R}{2}$. Krążek ustawiono na poziomej, chropowatej podłodze w taki sposób, że otwór znajduje się w jego górnym położeniu równowagi statycznej. Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 9 za współrzędną uogólnioną przyjmujemy mały kąt obrotu krążka $\varphi = \varphi(t)$. Wykluczamy poślizg krążka o sztywne, chropowate

podłoże. W pierwszej kolejności założymy, że cały krążek jest wypełniony masą o gęstości ρ . Zadanie rozwiązujemy metodą energetyczną. Energia kinetyczna, energia potencjalna, odpowiednie momenty bezwładności oraz równanie ruchu krążka z wyciętym otworem są następujące:

$$\begin{aligned}
 M &= \rho \pi R^2, \quad m = \rho \pi \frac{R^2}{4}, \quad m = \frac{1}{4} M, \quad J_S^{(M)} = \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 = \frac{3}{2} M R^2, \\
 J_S^{(m)} &= \frac{1}{2} m \frac{R^2}{4} + m \left(R + \frac{R}{2} \right)^2 = \frac{19}{8} m R^2 = \frac{19}{32} M R^2, \\
 J_S^{(z \text{ otwor.})} &= \frac{3}{2} M R^2 - \frac{19}{32} M R^2 = \frac{29}{32} M R^2, \quad \dot{\varphi} \neq 0, \quad \sin \varphi \cong \varphi, \\
 E_k &= \frac{1}{2} \frac{29}{32} M R^2 (\dot{\varphi})^2, \quad V = E_p = M g R - m g \left(R + \frac{1}{2} R \cos \varphi \right), \\
 \frac{d}{dt} (E_k + V) &= 0 \leftrightarrow \left(\frac{29}{32} R^2 \ddot{\varphi} + \frac{g}{8} \varphi \right) \dot{\varphi} = 0, \\
 \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi &= 0, \quad \omega^2 = \frac{4g}{29R}, \quad \omega = 2 \sqrt{\frac{g}{29R}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{29R}{g}}.
 \end{aligned} \tag{5}$$



Rys. 8. Sztywny krążek z otworem kołowym o promieniu $\frac{R}{2}$



Rys. 9. Współrzędna uogólniona $\varphi = \varphi(t)$ określająca jednoznacznie małe drgania własne krążka

Zajmiemy się teraz jednorodnym, sztywnym walcem eliptycznym o półosiach a i b , gęstości masy ρ i masie całkowitej M . Zgodnie z rysunkiem 10 w walcu wycięty jest otwór o promieniu $\frac{b}{2}$. Postępując identycznie jak w przypadku krążka z wyciętym otworem, mając na uwadze małe drgania walca, co w konsekwencji prowadzi do wykorzystania własności koła ściśle stycznego o promieniu krzywizny $\rho = b$, $r = \frac{1}{2} b$, zapisujemy następujące równania:

$$M = \rho \pi a b, \quad m = \rho \pi r^2 = \frac{1}{4} \rho \pi b^2 = M \frac{b}{4a},$$

$$J_S^{(M)} = \frac{1}{4} M (a^2 + 5 b^2) + m \left(\frac{1}{2} \frac{b^2}{4} + \frac{9b^2}{4} \right),$$

$$J_S^{(m)} = \frac{1}{2} m \frac{R^2}{4} + m \left(R + \frac{R}{2} \right)^2 = \frac{19}{8} m R^2 = \frac{19}{32} M R^2,$$

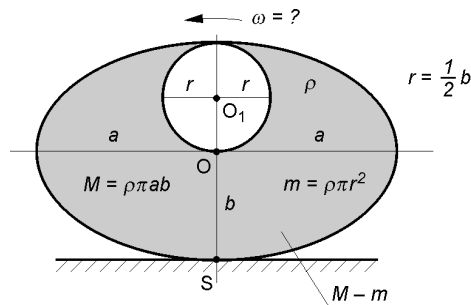
$$J_S^{(z \text{ otwor.})} = \frac{M}{4} \left(a^2 + 5 b^2 - \frac{19 b^3}{8 a} \right), \quad E_k = \frac{1}{2} J_S^{(z \text{ otwor.})} (\dot{\varphi})^2, \quad \dot{\varphi} \neq 0, \quad \sin \varphi = \varphi,$$

$$E_k = \frac{M}{8} \left(a^2 + 5 b^2 - \frac{19 b^3}{8 a} \right) (\dot{\varphi})^2 = \frac{M}{64 a} (8 a^3 + 40 a b^2 - 19 b^3) (\dot{\varphi})^2, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} V + E_p &= M g \left(\frac{a^2}{b} - b \right) (1 - \cos \varphi) - m g \left(\frac{a^2}{b} - \frac{3 b}{2} \right) (1 - \cos \varphi) = \\ &= M g \frac{(8 a^3 - 2 a^2 b - 8 a b^2 + 3 b^3)}{8 a b}, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} (E_k + V) = 0 \leftrightarrow \omega^2 = \frac{4 g}{b} \frac{8 a^3 - 2 a^2 b - 8 a b^2 + 3 b^3}{8 a^3 + 40 a b^2 - 19 b^3},$$

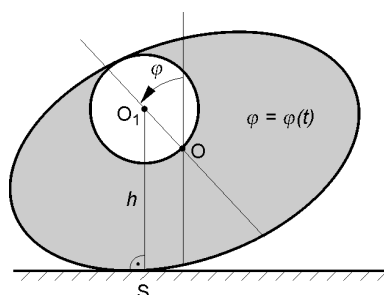
$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega = 2 \sqrt{\frac{g}{b} \frac{8 a^3 - 2 a^2 b - 8 a b^2 + 3 b^3}{8 a^3 + 40 a b^2 - 19 b^3}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{b}{g} \frac{8 a^3 + 40 a b^2 - 19 b^3}{8 a^3 - 2 a^2 b - 8 a b^2 + 3 b^3}}.$$



Rys. 10. Walec eliptyczny z wyciętym otworem o promieniu $r = b/2$

Poprawność ostatnich wzorów (6) łatwo sprawdzić, na przykład w przypadku częstości kołowej ω , w wyniku przejścia granicznego $a = b = R$. Otrzymujemy wtedy częstość kołową jak w przypadku krążka z wyciętym otworem:

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{g}{b} \frac{8a^3 - 2a^2b - 8ab^2 + 3b^3}{8a^3 + 40ab^2 - 19b^3}} = 2 \sqrt{\frac{g}{R} \frac{8 - 2 - 8 + 3}{8 + 40 - 19}} = 2 \sqrt{\frac{g}{29R}}. \quad (7)$$



Rys. 11. Współrzędna uogólniona $\varphi = \varphi(t)$ określająca jednoznacznie małe drgania własne walca

4. MAŁE DRGANIA KRĄŻKA W POWŁOCE O KSZTAŁCIE WALCA ELIPTYCZNEGO

Ostatnim przykładem w zakresie małych drgań będzie sztywny krążek o masie całkowitej m i promieniu r wykonujący małe drgania w chropowatej, sztywnej powłoce o kształcie walca cylindrycznego o półosiach a oraz b pokazanego na rysunku 12. Również i tutaj założymy, że przy małych drganiach krążka, który jest w ruchu płaskim, jego ruch odbywa się po kole ściśle stycznym o promieniu $\rho_B = \frac{a^2}{b}$ bez poślizgu. Wykorzystując metodę energetyczną i identyczny sposób postępowania jak w zadaniach poprzednich możemy napisać:

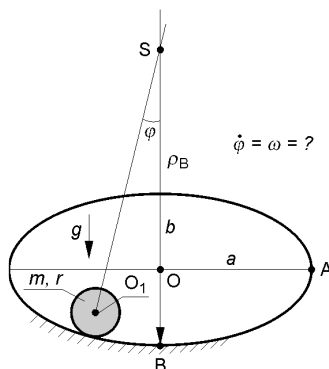
$$E_k = \frac{1}{2} m \left(\frac{a^2}{b} - b \right)^2 (\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m r^2 \frac{\left(\frac{a^2}{b} - r \right)^2}{r^2} (\dot{\varphi})^2 = \frac{3}{4} m \left(\frac{a^2}{b} - r \right)^2 \dot{\varphi}^2,$$

$$V = m g \left(\frac{a^2}{b} - r \right) (1 - \cos \varphi), \quad \frac{d}{dt} (E_k + V) = 0,$$

$$\left[\frac{3}{2} m \left(\frac{a^2}{b} - r \right)^2 \ddot{\varphi} + m g \left(\frac{a^2}{b} - r \right) \sin \varphi \right] \dot{\varphi} = 0, \quad \varphi \neq 0, \quad \sin \varphi \approx \varphi, \quad (8)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{2g}{3 \left(\frac{a^2}{b} - r \right)}, \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{3 \left(\frac{a^2}{b} - r \right)}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{3 \left(\frac{a^2}{b} - r \right)}{2g}}.$$



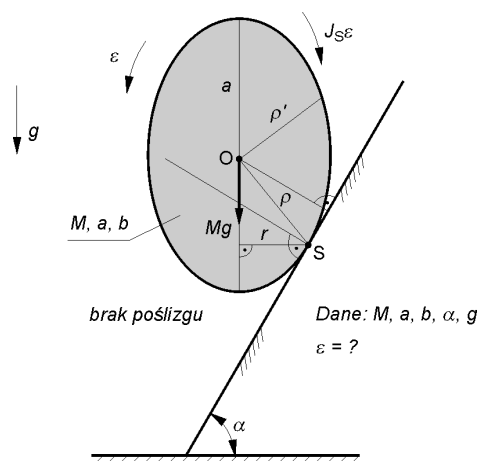
Rys. 12. Mały ruch krążka wewnątrz powłoki w kształcie walca eliptycznego

W przypadku małych drgań sztywnej, jednorodnej kuli o masie całkowitej m i promieniu r , w takim samym walcu eliptycznym, jej okres drgań własnych wynosi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{7 \left(\frac{a^2}{b} - r \right)}{5g}}. \quad (9)$$

5. RUCH WALCA ELIPTYCZNEGO PO RÓWNI POCHYLEJ

Rozważmy teraz ruch pełnego walca eliptycznego o masie całkowitej M oraz o półosiach a i b będącego na chropowatej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu α . Początkowa pozycja walca (duża oś w położeniu pionowym) pokazana jest na rysunku 13. Walec uwolniony z tej pozycji zacznie się staczać w dół z nieznanym przyspieszeniem kątowym ε , które należy wyznaczyć.



Rys. 13. Schemat dynamiczny walca eliptycznego na równi pochyłej w początkowej fazie ruchu płaskiego

W rozwiązaniu zadania korzystamy ze standardowej postaci prawa zachowania krętu (momentu pędu):

$$J_S \varepsilon = M g r. \quad (10)$$

Ze względu na geometrię zadania wyznaczenie wielkości r i J_S wymaga skomplikowanych przekształceń z zastosowaniem twierdzeń o własnościach elipsy. Z uwagi na to, w pracy przytaczamy ostateczny wzór na przyspieszenie ε :

$$\varepsilon = \frac{M g r}{J_S} = \frac{4 g b^2 \sin \alpha \sqrt{a^2 (\cos \alpha)^2 + b^2 (\sin \alpha)^2}}{5 [a^4 (\cos \alpha)^2 + b^4 (\sin \alpha)^2] + a^2 b^2}. \quad (11)$$

Przy $a = b = R$, na równi mamy krążek, a z odpowiedzi (11), w wyniku przejścia granicznego, otrzymujemy $\varepsilon = \frac{2 g \sin \alpha}{3 R}$, tak jak być powinno.

6. WNIOSKI

W przypadku małych drgań zarówno sztywnego walca eliptycznego, sztywnego walca osłabionego otworem, sztywnego krążka osłabionego otworem, krążka w nieruchomej sztywnej obręczy eliptycznej istnieją ściśle rozwiązania analityczne. Zadania stanowią wstępną analizę do badań układu koło – nawierzchnia komunikacyjna.

7. LITERATURA

- [1] Szczęśniak W.: *Dynamika teoretyczna w zadaniach dla dociekliwych*. OW PW, Warszawa 2010.
- [2] Szczęśniak W.: *Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych*. OW PW, Warszawa 2007.
- [3] Szczęśniak W.: *Dynamika analityczna i <<MATHEMATICA>>*. OW PW, Warszawa 2005.
- [4] Szczęśniak W., Ataman M.: *Modelowanie dynamiczne cieczy w cysternie za pomocą układu „obrzecz-kula”*. *Drgania poprzeczne*. 11th International Conference „Computer Systems Aided Science, Industry and Transport”, Transcomp 2007, Vol. 2, Zakopane 2007, pp. 277-282.
- [5] Szczęśniak W., Ataman M.: *Modelowanie dynamiczne cieczy w cysternie za pomocą układu „obrzecz-kula”*. *Drgania obrotowe*. 11th International Conference „Computer Systems Aided Science, Industry and Transport”, Transcomp 2007, Vol. 2, Zakopane 2007, pp. 283-287.
- [6] Szczęśniak W., Ataman M., Kwaśniewski L.: *Dynamic analysis of liquid motion in a tank using hoop and ball method with damping*. *Computer Systems Aided Science and Engineering Work in Transport, Mechanics and Electrical Engineering*. Monograph No122, Radom 2008, pp. 517-522.
- [7] Hand L.M., Finch J.D.: *Analytical mechanics*. Cambridge University Press 1998.
- [8] Gutowski R.: *Mechanika analityczna*. PWN, Warszawa 1971.