

Edward RYDYGIER¹
Zygmunt STRZYŻAKOWSKI²

METODY IDENTYFIKACJI ŹRÓDEŁ POLA WSPOMAGAJĄCE BADANIA WYBRANYCH ZAGADNIĘŃ W UKŁADZIE POJAZD SZYNOWY – TOR

W pracy przedstawiono opracowane metody numeryczne użyteczne w rozwiązywaniu wybranych zagadnień w układzie pojazd szynowy - tor. Zaprezentowano metody identyfikacji źródeł pola wspomagające badania nad kontaktem tocznym koło-szyna. Ponieważ identyfikacja źródeł pola w modelowaniu matematycznym należy do klasy problemów odwrotnych, metody numeryczne wymagają uzupełnienia odpowiednimi procedurami regularyzującymi. Innym sposobem identyfikacji źródeł jest minimalizacja pewnego funkcjonatu dla funkcji źródłowej. Funkcjonał ten nazwano funkcjonatem mocy przez analogię do zagadnienia obwodowego w elektrotechnice. W pracy przedstawiono także metodę modelowania dynamiki kontaktu koło - szyna skonstruowaną w oparciu o pojęcie energii jednookresowej. Metoda ta pozwala na wyznaczanie odpowiedzi dokładnej i mniejszym kosztem obliczeniowym niż w przypadku metod obliczania przybliżonego. W pracy wykazano, że pewne narzędzia obliczeniowe wykorzystywane w elektrotechnice można z powodzeniem zaadaptować do modelowania wybranych zagadnień w układzie pojazd szynowy – tor.

METHODS OF FIELD SOURCES IDENTIFICATION SUPPORTED STUDIES ON SELECTED ISSUES IN A RAIL VEHICLE – TRACK SYSTEM

In this paper there are presented some established numerical methods for field sources' identification in 2-D systems which are used to solve selected issues in a rail vehicle - track system. With regard to belongings a group of identification problems to the class of inverse problems, numerical methods would be completed by special regularization procedures. Another approach of sources identification is a minimization the special functional of sources' function. This functional was called the power functional in an analogy to the energetic problem of electrical circuits analysed in electrical engineering. Also the special method for dynamical modelling a wheel - rail contact for the vertical force was presented. This method

¹ Municipal Office of the Capital City of Warsaw, POLAND, PL-00-983 Warsaw, 20 Kondratowicza Street, Phone: + 48 22 33-89-440, E-mail: rydygier@o2.pl; Kazimierz Pulaski Technical University of Radom, Faculty of Transport and Electrical Engineering, POLAND, PL-26-600 Radom, 29 Malczewskiego Street; MacLeod Institute of Simulation Sciences - Satellite Center at Technical University of Radom.

² Kazimierz Pulaski Technical University of Radom, Faculty of Transport and Electrical Engineering, Institute of Automatics and Telematics, POLAND, PL-26-600 Radom; 29 Malczewskiego Street, Phone: + 48 48 361-77-15, E-mail: zstrz@data.pl; MacLeod Institute of Simulation Sciences - Satellite Center at Technical Univ. of Radom.

was constructed using the one period energy concept from an electrical circuits' analysis in real time. This method allows obtain an exact answer using up less computational costs then in the instance of approximate calculations.

1. WSTĘP

W pracy przedstawiono opracowane metody numeryczne przydatne do badań wybranych zagadnień w układzie pojazd szynowy – tor. Algorytmy obliczeniowe w zaprezentowanych metodach numerycznych zostały skonstruowane przez adaptację specjalnych narzędzi obliczeniowych wykorzystywanych w elektrotechnice. Wykazano, że wielomiany potęgowe, wykorzystywane w obliczeniach sieci i obwodów elektrycznych, stanowią efektywne narzędzia obliczeniowe w algorytmach metod numerycznych służących do identyfikacji źródeł pól fizycznych opisanych równaniem cząstkowym Poissona. Innym narzędziem obliczeniowym wykorzystywanym do opisu stanu sieci rozgałęzionej jest funkcjonal mocy, który w procedurze optymalizacji jest także użyteczny do rozwiązania zagadnienia identyfikacji źródeł pola opisanego równaniem Poissona. Opracowane z użyciem wielomianów potęgowych i funkcjonu mocy metody identyfikacji źródeł mogą znaleźć zastosowanie w rozwiązywaniu zagadnień wytrzymałościowych i cieplnych w modelowaniu układu pojazd szynowy – tor, jak zagadnienie skreślenia szyny kolejowej czy wyznaczanie źródeł w śladzie cieplnym wywołanym kontaktem tocznym koło-szyna.. Wykazano także, że sposób obliczeń z wykorzystaniem pojęcia energii jednookresowej stosowany w analizie w czasie rzeczywistym procesów energetycznych w obwodach elektrycznych może znaleźć zastosowanie w modelowaniu dynamiki kontaktu koło - szyna dla siły wertykalnej.

2. METODA IDENTYFIKACJI ŹRÓDEŁ POLA PRZY UŻYCIU WIELOMIANÓW

Wielomiany potęgowe o stałych współczynnikach stanowią efektywne narzędzia matematyczne w obliczeniach sieci i obwodów elektrycznych. Takim rodzajem wielomianów są moniczne wielomiany potęgowe o współczynnikach generowanych przez zmodyfikowane trójkąty liczbowe. Elementy pierwszego zmodyfikowanego trójkąta liczbowego *MNTI* można wyznaczyć za pomocą następującej formuły rekurencyjnej

$$a_{n,k} = 2a_{n-1,k} + a_{n-1,k-1} - a_{n-2,k}, \quad a_{0,0} = 1, \quad a_{1,0} = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq k \leq n \quad (1)$$

Trójkąt liczbowy *MNTI* generuje moniczne wielomiany potęgowe $T_n(q)$ dla $q \in R$ zdefiniowane za pomocą formuły rekurencyjnej

$$T_{n+2}(q) = (2 + q)T_{n+1}(q) - T_n(q), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad T_0(q) = 1, \quad T_1(q) = 1 + q, \quad (2)$$

w następujący sposób

$$T_n(q) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} q^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

W oparciu o elementy trójkąta *MNTI* (1) wyznaczono kilka pierwszych wielomianów monicznych $T_n(q)$:

$$T_0(q) = 1$$

$$\begin{aligned}
 T_1(q) &= 1 + q \\
 T_2(q) &= 1 + 3q + q^2 \\
 T_3(q) &= 1 + 6q + 5q^2 + q^3 \\
 T_4(q) &= 1 + 10q + 15q^2 + 7q^3 + q^4 \\
 T_5(q) &= 1 + 15q + 35q^2 + 28q^3 + 9q^4 + q^5. \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots
 \end{aligned}$$

Elementy drugiego zmodyfikowanego trójkąta liczbowego *MNT2* mogą zostać wyznaczone za pomocą następującej formuły rekurencyjnej

$$b_{n,r} = 2b_{n-1,r} + b_{n-1,r-1} - b_{n-2,r}, \quad b_{0,0} = 0, \quad b_{1,0} = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq r \leq n. \quad (4)$$

Trójkąt liczbowy *MNT2* generuje moniczne wielomiany potęgowe $P_n(q)$ dla $q \in R$ zdefiniowane za pomocą formuły rekurencyjnej

$$P_{n+2}(q) = (2 + q)P_{n+1}(q) - P_n(q), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad P_0(q) = 0, P_1(q) = 1, \quad (5)$$

w następujący sposób

$$P_n(q) = \sum_{r=0}^n b_{n,r} q^r, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (6)$$

Znając elementy trójkąta *MNT2* (4) można wyznaczyć wielomiany $P_n(q)$:

$$\begin{aligned}
 P_0(q) &= 0 \\
 P_1(q) &= 1 \\
 P_2(q) &= 2 + q \\
 P_3(q) &= 3 + 4q + q^2 \\
 P_4(q) &= 4 + 10q + 6q^2 + q^3 \\
 P_5(q) &= 5 + 20q + 21q^2 + 8q^3 + q^4. \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots
 \end{aligned}$$

Między wielomianami $P_n(q)$ i $T_n(q)$ zachodzą następujące relacje:

$$qP_n(q) = T_n(q) - T_{n-1}(q), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

$$P_n(q)T_{n-1}(q) - P_{n-1}T_n(q) = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Prawidłowością charakteryzującą konstrukcję zmodyfikowanych trójkątów liczbowych jest to, że sumy elementów w wierszach pierwszego (1, 2, 5, 13, 34, 89, ...) i drugiego trójkąta (0, 1, 3, 8, 21, 55, ...) są równe odpowiednio parzystym F_{2n} , $n = 0, 1, 2, \dots$, lub nieparzystym F_{2n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots$ wyrazom ciągu Fibonacciego zdefiniowanego za pomocą następującej formuły [9]

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

dla wyrazów początkowych $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$.

Ciąg Fibonacciego stanowią liczby (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...), zwane też liczbami Fibonacciego. Ciąg Fibonacciego charakteryzuje się tym, że ciąg ilorazów wyrazu

następnego do poprzedniego dla $n \rightarrow \infty$ zbiega do granicy $\lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1,6180339 \dots = \Phi$,

gdzie Φ oznacza proporcję złotego podziału odcinka, zwaną też „złotą liczbą”, lub „złotym środkiem” [9]. Jeśli przez x oznaczymy punkt podziału odcinka o długości 1, to w złotej proporcji powinien od spełniać zależność

$$1 : x = x : 1 - x. \quad (10)$$

Nadając proporcji (10) postać równania $x^2 + x - 1 = 0$ wyznaczamy $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} =$

0,6180339, natomiast proporcja złotego podziału odcinka $1 : x = 2/(-1 + \sqrt{5}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} =$

1,6180339 $\dots = \Phi$.

Liczby ciągu Fibonacciego znajdują zastosowanie w biologii, chemii organicznej ostatnio także na giełdzie. W elektrotechnice liczby Fibonacciego znajdują zastosowanie w obliczeniach obwodów jednorodnych o strukturze wielokąt - gwiazda, a także w obliczeniach parametrów wejściowych linii transmisyjnych. Także potęgowe wielomiany moniczne znajdują zastosowanie w elektrotechnice w obliczeniach periodycznych sieci elektrycznych [2, 8]. Przykładowo dla obwodu drabinkowego z opornikami o rezystancji R i konduktancji G impedancja wejściowa R_{in} jest określona przez ułamek łańcuchowy $r(a, b) = [a; b, a, b, \dots, a]$, gdzie $a = R$, $b = R/G$. Napięcie w k -tym oczku obwodu można zapisać przy użyciu wielomianu $T_n(q)$ w następujący sposób [8]

$$U_k = T_k(q)U_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad q = RG = a^2/b, \quad (11)$$

a impedancję wejściową R_{in} w formie

$$R_{in} = \frac{U_n}{I_n} = \frac{RT_n(q)}{T_n(q) - T_{n-1}(q)} = \frac{1}{G} \frac{T_n(q)}{P_n(q)}. \quad (12)$$

Ponieważ $R_{in} = r_n(a, b)$,

np. dla $n = 2$ $r_2(a, b) = a + b/(a + b/(a + b/a)) = \frac{1 + 3q + q^2}{G(2 + q)} = \frac{1}{G} \frac{T_2(q)}{P_2(q)}$,

$\frac{a}{b} r_n(a, b) = \frac{T_n(q)}{P_n(q)}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, dla $n \rightarrow \infty$ $\lim \frac{T_n(q)}{P_n(q)} = \frac{a}{b} \lim r_n(a, b) =$

$$q \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{q}} \right).$$

Gdy $q = RG = 1$ dla $n \rightarrow \infty$ granica $\lim \frac{T_n(q)}{P_n(q)} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) = 1,6180339 \dots = \Phi$.

Narzędzia obliczeniowe w postaci potęgowych wielomianów monicznych $T_n(q)$ i $P_n(q)$ można zastosować w algorytmach metod numerycznych służących do identyfikacji źródeł pola dla układów opisanych równaniem Poissona. Układ 2-D opisany równaniem Poissona ze znanymi warunkami brzegowymi $u|_{\Gamma}$ na brzegu Γ badanego obszaru ma postać [3]

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (13)$$

gdzie: $x \in (0, l_x)$, $y \in (0, l_y)$, $u = u(x, y) \in R^2$ - funkcja polowa, $f = f(x, y) \in R^2$ - funkcja rozkładu źródeł (funkcja źródłowa).

Dla układu (13) zadanie identyfikacji źródeł pola polega na wyznaczeniu funkcji rozkładu źródeł $f(x, y)$, co stanowi rozwiązanie problemu odwrotnego. Aby rozwiązać ten problem numerycznie należy przybliżyć ciągły opis układu modelem dyskretnym. Po zamianie zmiennych ciągłych na dyskretne, np. w przypadku prostokątnej siatki podziału badanego obszaru o wymiarach $l_x \times l_y$ według wzoru $x = ih, i = 0, 1, 2, \dots, M, y = jh, j = 0, 1, 2, \dots, N, M = l_x/h, N = l_y/h, h$ - długość kroku dyskretyzacji, przybliżenie równania różniczkowego równaniem różnicowym za pomocą schematu różnic skończonych sprowadza się do uzyskania układu równań algebraicznych wiążących wartości funkcji polowej u i źródłowej f w węzłach siatki w następujący sposób

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = h^2 f(i, j) = q_{i,j} \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N, \quad (14)$$

gdzie: $u_{i,j} = u(i, j), q_{i,j} = q(i, j)$.

Warunki brzegowe dla równania (14) przyjmują postać

$$\begin{aligned} u(0, j) = U_0(j), & \quad u(M, j) = U_M(j), & \quad j = 0, 1, \dots, N \\ u(i, 0) = U_0(i), & \quad u(i, N) = U_N(i), & \quad i = 0, 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Dla modelu dyskretnego (14) rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł polega na wyznaczeniu wartości funkcji źródłowej $q(i, j)$ w węzłach siatki. Funkcja źródłowa aproksymowana dyskretnym rozkładem Fouriera ma postać

$$f_{m,n} = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{N-1} F_m(k) \sin \frac{k\pi n}{N}, \quad f_{m,0} = f_{m,N} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (15)$$

gdzie n jest parametrem, $F(k)$ oznacza współczynniki rozkładu dla $k = 1, 2, \dots, N-1$. Podobnie została rozwinięta funkcja polowa

$$u_{m,n} = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{N-1} U_m(k) \sin \frac{k\pi n}{N}, \quad u_{0,n} = u_{M,n} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (16)$$

Równanie (14) zapisane przy użyciu współczynników rozkładu Fouriera przyjmuje następującą formę

$$\frac{1}{h^2} \left[(U_{m+1}(k) - 2U_m(k) + U_{m-1}(k)) - (4 \sin^2 \frac{k\pi}{2N}) U_m(k) \right] = F_m(k), \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (17)$$

z warunkami brzegowymi określonymi przez $U_0(k) = 0$ oraz wartości $U_M(k)$ wyznaczone z równości $u_{M,n} = 0, n = 1, \dots, N$.

Po podstawieniu wielomianu $P(q_k)$ (6) dla $q_k = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2N}$ do (17) rozwiązanie problemu prostego przyjmuje formę

$$U_m(k) = P_m(q_k)U_1(k) + \sum_{l=1}^{m-1} P_{m-l}(q_k)h^2 F_l(k), \quad m = 2, 3, \dots, M-1. \quad (18)$$

Wartości $U_1(k)$ w równaniu (18) można wyznaczyć z warunków brzegowych (16). Dla $N = M$ z układu $M-1$ równań można wyznaczyć zestaw współczynników $U_M(k)$, $k = 1, 2, \dots, M-1$. Następnie przez podstawienie tych współczynników do równania (18) dla $m = M$, można otrzymać zestaw współczynników $U_1(k)$ dla $k = 1, 2, \dots, M-1$. Rozwiązanie problemu odwrotnego wyznaczone przy użyciu monicznych wielomianów $P(q_k)$ przyjmuje następującą postać:

$$F_l(k) = \frac{U_{l+1}(k) - P_{l+1}(q_k)U_1(k) - \sum_{i=1}^{l-1} P_{l+1-i}(q_k)h^2 F_i(k)}{P_l(q_k)h^2}. \quad (19)$$

Funkcja źródłowa odtworzona ze współczynników rozkładu (19) według formuły (15) stanowi rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł pola. Ponieważ zagadnienie identyfikacji jest problemem odwrotnym zatem jego rozwiązanie wymaga stabilizacji wyników obliczeń [1]. Opracowana przez autorów artykułu Metoda Symulacyjna identyfikacji została uzupełniona przez specjalną numeryczną procedurę aproksymacyjną opracowaną na podstawie metody odwrotnych odległości używaną do wygładzania danych w układach 2-D, która stanowi rodzaj samoregulacji [5].

3. PRYZYPADEK ZREDUKOWANYCH DANYCH POMIAROWYCH

Metoda identyfikacji źródeł wykorzystująca wielomiany potęgowe może zostać zaadaptowana dla przypadku posiadania zredukowanej informacji pomiarowej ograniczonej tylko do danych pomiarowych z brzegu badanego obszaru. Zamiana zmiennych ciągłych na dyskretne

$$x = ih, \quad i = 0, 1, \dots, M+1, \quad y = jh, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (20)$$

umożliwia aproksymację równania (12) do postaci różnicowej metodą różnic skończonych

$$u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j) + u(i, j+1) - 2u(i, j) + u(i, j-1) = h^2 f(i, j) = g(i, j), \quad (21)$$

gdzie: $g(i, j)$ - zastępcza funkcja źródłowa.

Warunki brzegowe mają postać:

$$\begin{aligned} u(0, j) &= U_0(j), & u(M+1, j) &= U_{M+1}(j), & j &= 0, 1, \dots, N \\ u(i, 0) &= U_0(i), & u(i, N) &= U_N(i), & i &= 0, 1, \dots, M, M+1. \end{aligned}$$

Przez wprowadzenie wielkości $U(i)$ oraz $G(i)$ oznaczających odpowiednio wektor potencjałów oraz wartości funkcji źródłowej w i -tej kolumnie siatki dla $j = 1, 2, \dots, N-1$, układ równań (21) wraz z warunkami brzegowymi można zapisać w postaci macierzowej

$$U(i+1) - (2E+A)U(i) + U(i-1) = G(i) - V_0(i) - V_N(i), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (22)$$

gdzie: $V_0(i)$ - wektor wartości potencjałów dla $j=0$, $V_N(i)$ - wektor wartości potencjałów dla $j=N$ w i -tej kolumnie siatki, E - macierz jednostkowa, A - macierz aproksymacji różnicowej względem zmiennej j , natomiast wektory i macierze mają postać

$$G(i) = \begin{bmatrix} g(i,1) \\ g(i,2) \\ \dots \\ g(i, N-1) \end{bmatrix}, \quad V_0(i) = \begin{bmatrix} u(i,0) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_N(i) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ u(i, N) \end{bmatrix},$$

$$U(i) = \begin{bmatrix} u(i,1) \\ u(i,2) \\ \dots \\ u(i, N-1) \end{bmatrix}, \quad E = \text{diag} [1]_1^{N-1}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Macierz charakterystyczna $B = 2E+A$, pozwala wprowadzić do układu (23) macierzowe wielomiany moniczne rodzaju $P_n(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} A^k$.

Wprowadzając do równania (22) wielomiany moniczne i eliminując nieznanne wartości potencjałów o indeksach $i = 1, 2, \dots, M-1$, otrzymujemy następujące równanie

$$P_{M-1}(A) U_{M+1} - P_M(A) U_M + U_0 + H_{0N} = \sum_{i=1}^M P_{i-1}(A) G(i), \quad (23)$$

gdzie: U_{M+1} - wektor znanych wartości potencjału na brzegu obszaru dla $i = M+1$, U_M - wektor wartości potencjału dla $i = M$, U_0 - wektor znanych wartości potencjału dla $i = 0$

$$U_{M+1} = \begin{bmatrix} u(M+1,1) \\ u(M+1,2) \\ \dots \\ u(M+1, N-1) \end{bmatrix}, \quad U_M = \begin{bmatrix} u(M,1) \\ u(M,2) \\ \dots \\ u(M, N-1) \end{bmatrix}, \quad U_0 = \begin{bmatrix} u(0,1) \\ u(0,2) \\ \dots \\ u(0, N-1) \end{bmatrix},$$

$H_{0N} = H_0 + H_N$, gdzie H_0 jest wektorem o znanych wartościach potencjału dla $j = 0$, a H_N dla $j = N$. Ponieważ potęgowe wielomiany moniczne $P_n(A)$ tworzą wyrazy uzależnione od kolejnych potęg macierzy A , to porównując odpowiednie współczynniki z lewej i prawej strony równania (23) można wyznaczyć wszystkie wektory $G(i)$, $i = 1, 2, \dots, M$, a tym samym otrzymać rozkład źródeł. Rozwiązanie zagadnienia (23) wymaga jednak znajomości wartości potencjałów w węzłach kolumny sąsiadującej z brzegiem, tj. U_M . Gdy warstwa przy jednym brzegu nie jest dostępna dla pomiarów, wówczas wartości można uzyskać przez przeskalowanie wektora potencjałów na brzegu przyjmując $U_M = \alpha U_{M+1}$, gdzie współczynnik skalowania $\alpha > 1$.

Przykład 1

W celu zilustrowania efektywności opracowanej metody identyfikacji wykonano obliczenia przyjmując $M = 3$ i $N = 3$. Na podstawie równania (22) można skonstruować układ równań

$$\begin{aligned} U(2) - (2E + A)U(1) + U(0) &= G(1) - V_0^3(1) \\ U(3) - (2E + A)U(2) + U(1) &= G(2) - V_0^3(2) \\ U(4) - (2E + A)U(3) + U(2) &= G(3) - V_0^3(3) \end{aligned}$$

$$U(0) = \begin{bmatrix} u(0,1) \\ u(0,2) \end{bmatrix}, \quad U(1) = \begin{bmatrix} u(1,1) \\ u(1,2) \end{bmatrix}, \quad U(2) = \begin{bmatrix} u(2,1) \\ u(2,2) \end{bmatrix}, \quad U(3) = \begin{bmatrix} u(3,1) \\ u(3,2) \end{bmatrix},$$

$$U(4) = \begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix}, \quad V_0^3(1) = V_0(1) - V_3(1) = \begin{bmatrix} u(1,0) \\ u(1,3) \end{bmatrix}, \quad V_0^3(2) = V_0(1) - V_N(1) = \begin{bmatrix} u(2,0) \\ u(2,3) \end{bmatrix},$$

$$V_0^3(2) = V_0(1) - V_N(1) = \begin{bmatrix} u(3,0) \\ u(3,3) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G(1) = \begin{bmatrix} g(1,1) \\ g(1,2) \end{bmatrix}, \quad G(2) = \begin{bmatrix} g(2,1) \\ g(2,2) \end{bmatrix}, \quad G(3) = \begin{bmatrix} g(3,1) \\ g(3,2) \end{bmatrix}.$$

Po wyeliminowaniu wektorów $U(1)$, $U(2)$ otrzymujemy następujące równanie

$$(3E+4A+A^2)U_4 - (4E+10A+6A^2+A^3)U_3 + U_0 + (3E+4A+A^4)U_{0,3}^3 + (2E+A)U_{0,1}^3 = (3E+4A+A^2)G_3 + (2E+A)G_2 + G_1,$$

$$U_1 = U(1), \quad U_2 = U(2), \quad U_3 = U(3), \quad U_4 = U(4), \quad G_1 = G(1), \quad G_2 = G(2), \quad G_3 = G(3), \\ V_{0,1}^3 = V_0^3(1), \quad V_{0,2}^3 = V_0^3(2), \quad V_{0,3}^3 = V_0^3(3).$$

Po uporządkowaniu wyrazów i porównaniu współczynników przy tych samych potęgach A otrzymujemy

$$G_1 = 14U_3 + U_0 + V_{0,1}^3, \quad G_2 = 14U_3 + V_{0,2}^3, \quad G_3 = U_4 - 6U_3 + V_{0,3}^3.$$

Podstawiając $U_3 = \alpha U_4$ otrzymujemy

$$G_1 = 14\alpha U_4 + U_0 + V_{0,1}^3, \quad G_2 = 14\alpha U_4 + V_{0,2}^3, \quad G_3 = (1 - 6\alpha)U_4 + U_0 + V_{0,1}^3,$$

$$\text{gdzie} \quad G_1 = \begin{bmatrix} g(1,1) \\ g(1,2) \end{bmatrix} = 14\alpha \begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(0,1) \\ u(0,2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(1,0) \\ u(1,3) \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} g(2,1) \\ g(2,2) \end{bmatrix} = 14\alpha \begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(2,0) \\ u(2,3) \end{bmatrix}, \quad G_3 = \begin{bmatrix} g(3,1) \\ g(3,2) \end{bmatrix} = (1 - 6\alpha) \begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(3,0) \\ u(3,3) \end{bmatrix}.$$

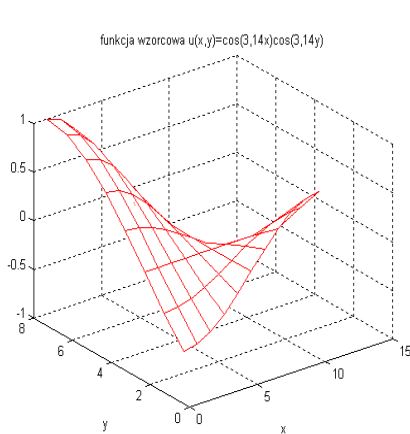
Przykład 2

Półowa funkcja wzorcowa (benchmark function): $u_1(x, y) = \cos \pi x \cos \pi y$, $x \in (0, 1)$, $y \in (0, 1)$ z warunkami brzegowymi

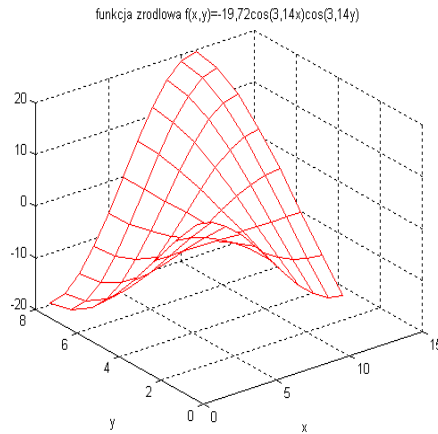
$$\begin{aligned} u(0, y) &= \cos \pi y, & u(x, 0) &= \cos \pi x, \\ u(1, y) &= -\cos \pi y, & u(x, 1) &= -\cos \pi x. \end{aligned}$$

Rozwiązując analitycznie równanie Poissona dla funkcji $u_1(x, y)$ otrzymujemy funkcję źródłową w postaci

$$f_1(x, y) = -2\pi^2 \cos \pi x \cos \pi y .$$



Rys. 1. Funkcja wzorcowa u_1



Rys. 2. Funkcja źródłowa wzorcowa f_1

Dla kroku dyskretyzacji $h = 0,25$ otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\frac{\pi}{4}) \\ -\cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0,1) \\ u(0,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(1,0) \\ u(1,3) \end{bmatrix} =$$

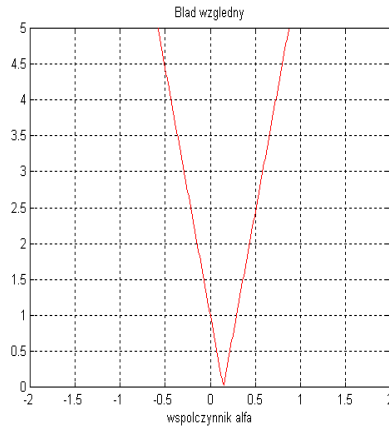
$$\begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\frac{3\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u(2,0) \\ u(2,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\frac{3\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(3,0) \\ u(3,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{3\pi}{4}) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\frac{3\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} g(1,1) \\ g(1,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}(7\alpha+1) \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} g(2,1) \\ g(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}(7\alpha+1) \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} g(3,1) \\ g(3,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}\alpha \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Wartość współczynnika α można oszacować z analizy błędu względnego. Dla wartości funkcji źródłowej $f(3, 1) = \frac{1}{h^2} \alpha 3\sqrt{2} = 48\sqrt{2}\alpha$, odpowiednie rozwiązanie analityczne wynosi $f_a\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \pi^2$.

$$\text{Błąd względny } \delta(\alpha) = \frac{\left| f(3,1) - f_a\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \right|}{f_a\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)} = \left| \frac{48\sqrt{2}\alpha}{\pi^2} - 1 \right| = |6,88\alpha - 1|.$$



Rys. 3. Wykres błędu względnego $\delta(\alpha)$

4. METODA IDENTYFIKACJI ŹRÓDEŁ PRZY UŻYCIU FUNKCJONAŁU MOCY

Rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł pola można uzyskać jako rozwiązanie zagadnienia optymalizacji przez wyznaczenie ekstremum funkcjonału mocy. Dla układu 2-D, w odniesieniu do różnicowej postaci równania Poissona (14), funkcjonał mocy można zdefiniować następująco

$$F = \sum_{i,j=1} F_{i,j} = \sum_{i,j=1} \left[\frac{1}{2} [(u_{i,j} - u_{i+1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j+1})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j-1})^2] - u_{i,j} q_{i,j} \right] \quad (27)$$

Funkcjonał w postaci powyższej formuły został nazwany funkcjonałem mocy przez analogię do rozwiązania zagadnienia obwodowego w elektrotechnice [8]. Jeśli zamiast siatki prostokątnej dyskretyzującej badany obszar rozpatrzona zostanie sieć rezystancyjna, to wówczas funkcjonał mocy określa moc w obwodzie. W przypadku sieci rezystancyjnej zawierającej oporniki jednakowej konduktancji $G=R^{-1}$, funkcjonał mocy dla sieci o węzłach w punktach $(i-1, j)$, (i, j) , $(i, j+1)$, $(i, j-1)$, $(i+1, j)$ przybiera postać

$$F_{i,j} = \frac{1}{2} G [(V_{i,j} - V_{i+1,j})^2 + (V_{i,j} - V_{i-1,j})^2 + (V_{i,j} - V_{i,j+1})^2 + (V_{i,j} - V_{i,j-1})^2] - V_{i,j} I_{i,j}, \quad (28)$$

gdzie: $I_{i,j}$ - natężenie prądu źródła prądowego dołączonego w punkcie (i, j) , $V_{i,j}$ - napięcie w punkcie (i, j) , $V_{i+1,j}$ - napięcie w punkcie $(i+1, j)$, $V_{i,j+1}$ - napięcie w punkcie $(i, j+1)$, $V_{i,j-1}$ - napięcie w punkcie $(i, j-1)$, kwadraty różnic napięć zostały uzyskane z podstawienia w miejsce odpowiedniego prądu płynącego między sąsiednimi węzłami iloczynu konduktancji i różnicy odpowiednich napięć.

Funkcjonał mocy (28) dla układu (13) jest skonstruowany z dwóch składowych. Pierwsza składowa jest określona jako połowa sumy mocy elementów pasywnych, a druga składowa - mocą źródła prądowego występującego w obwodzie. Przyjmując $G=1S$, $q_{i,j} = I_{i,j}$, $u_{i,j} = V_{i,j}$ oraz sumując po indeksach i, j otrzymujemy wyrażenie (27). Po wyznaczeniu z równania (14) potencjałów „pośrednich”, tzn. służących do obliczeń pośrednich przy znanych wartościach potencjałów na brzegu obszaru i przez podstawienie ich do równania (27) uzależniono funkcjonal mocy od wartości źródeł, które stanowią zmienne niezależne. Identyfikacja źródeł za pomocą funkcjonalu mocy (27) polega na minimalizacji tego funkcjonalu dla dyskretnej wartości $q_{i,j}$. W pojęciach rzeczywistego funkcjonalu kwadratowego $F = F(q_1, q_2, \dots, q_n)$, gdzie n - ilość źródeł, poszukiwany zestaw źródeł q_1^* , q_2^* , \dots , q_n^* wyznacza się jako punkt stacjonarny funkcjonalu przez obliczenie jego gradientu i przyrównaniu go do zera

$$\nabla F = 0. \quad (29)$$

Funkcjonał kwadratowy może zostać przedstawiony w postaci macierzowej następująco

$$F = A_0 + \mathbf{B}^t \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{C} \mathbf{q}, \quad (30)$$

gdzie: górny indeks t oznacza transpozycję, A_0 i składowe wektora \mathbf{B} stanowią wyrazy skalarne, a macierz \mathbf{C} jest macierzą kwadratową.

Stosując regułę obliczania gradientu funkcjonalu kwadratowego [2], wyznaczamy gradient funkcjonalu w postaci

$$\nabla F = \mathbf{B} + \mathbf{C} \mathbf{q}. \quad (31)$$

Porównując gradient (31) do zera wyznaczamy punkt stacjonarny funkcjonalu mocy F

$$\mathbf{q}^* = -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}. \quad (32)$$

Znając szczegółową postać funkcjonalu (30) można wyznaczyć jego punkt stacjonarny w oparciu o zależność (32) i uzyskać rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł.

Przykład 3

Dla układu 2-D przyjmujemy dyskretyzację badanego obszaru siatką kwadratową dla $N = M = 3$. Potencjały pośrednie położone w węzłach wewnętrznych oznaczymy przez V_1, V_2, V_3, V_4 , wartości znanych potencjałów brzegowych przez $V_5, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10}, V_{11}, V_{12}$, natomiast nieznanne wartości funkcji źródłowej przez q_1, q_2, q_3, q_4 . Dla powyższych oznaczeń różnicowe równanie przybliżające równanie różniczkowe Poissona przyjmuje w zapisie macierzowym następującą postać

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_5 + V_{12} \\ V_{10} + V_{11} \\ V_6 + V_7 \\ V_8 + V_9 \end{bmatrix}$$

skąd

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_5 + V_{12} \\ V_{10} + V_{11} \\ V_6 + V_7 \\ V_8 + V_9 \end{bmatrix}.$$

Funkcjonał mocy zgodnie ze wzorem (27) przyjmuje postać

$$F = \frac{1}{2} [(V_1 - V_5)^2 + (V_1 - V_{12})^2 + (V_1 - V_2)^2 + (V_1 - V_3)^2 + (V_3 - V_6)^2 + (V_3 - V_7)^2 + (V_3 - V_4)^2 + \dots \\ + (V_4 - V_8)^2 + (V_4 - V_2)^2 + (V_4 - V_9)^2 + (V_2 - V_{10})^2 + (V_2 - V_{11})^2] - V_1 q_1 - V_2 q_2 - V_3 q_3 - V_4 q_4.$$

Funkcjonał mocy przedstawiony przez powyższe wyrażenie odznacza się specyficznymi cechami: w nawiasach kwadratowych znajduje się 12 członów, które odpowiadają dwunastu odcinkom łączącym 12 węzły siatki, natomiast poza nawiasami znajdują się cztery składniki odpowiadające 4 węzłom, w których znajdują się poszukiwane źródła. Gdy wprowadzimy oznaczenia

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \equiv \mathbf{R}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_5 + V_{12} \\ V_{10} + V_{11} \\ V_6 + V_7 \\ V_8 + V_9 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}.$$

Po podstawieniu wartości potencjałów pośrednich do wzoru na funkcyjonał mocy otrzymamy funkcyjonał w postaci formy kwadratowej

$$F = A_0 + [B_1, B_2, B_3, B_4] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [q_1, q_2, q_3, q_4] \mathbf{C} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad \text{skąd} \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = -\mathbf{C}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}.$$

Metody identyfikacji źródeł pola z wykorzystaniem w algorytmach obliczeniowych wielomianów potęgowych mogą znaleźć zastosowania w modelowaniu wybranych zagadnień w układzie pojazd szynowy – szyna [6, 7]. Ze względu na opis układu równaniem Poissona do badań nadają się zagadnienia wytrzymałościowe i cieplne, jak zagadnienie skręcania szyny kolejowej czy badanie śladu cieplny w szynie wytwornego przez kontakt toczny koło – szyna [4, 5, 6, 7].

5. MODELOWANIE KONTAKTU KOŁO-SZYNA DLA SIŁY WERTYKALNEJ

Pojęcie energii jednookresowej stosowane jest w analizie w czasie rzeczywistym procesów energetycznych w obwodach elektrycznych [8] w stanie okresowym niesinusoidalnym. Procesy energetyczne można wówczas badać na płaszczyźnie fazowej energii oraz oceniać je na podstawie zmian chwilowego napięcia i prądu związanych z danym elementem obwodu w ciągu jednego okresu. Biorąc pod uwagę dwójnik dynamiczny działający w stanie okresowym niesinusoidalnym, dla którego sygnałem wymuszenia będzie napięcie $v(t) = v(t + T)$, T - okres, a odpowiedzią prąd $i(t) = i(t + T)$, energię oddaną przez źródło $v(t)$ do odbiornika w przedziale czasu $\Delta t = nT$, $n \in \mathbb{N}$, określamy wyrażeniem

$$(\Delta t) = nW_T, \quad (33)$$

gdzie: W_T - energia jednookresowa, tzn. energia dostarczona do odbiornika podczas jednego okresu wymuszenia i odpowiedzi.

Zatem w stanie okresowym niesinusoidalnym wyznaczenie energii pobranej ze źródła przez odbiornik w danym przedziale czasu $\Delta t = nT$ można sprowadzić do określenia energii jednookresowej W_T , a następnie pomnożenia przez n . Dla badanego zagadnienia W_T wynosi

$$W_T = \int_0^T v(t)i(t)dt = \int_0^T v(t) \frac{d}{dt} \left(\int_0^t i(\tau)d\tau \right) dt = \int_{q(0)}^{q(T)} v(t)dq(t) = \int_{\psi(0)}^{\psi(T)} i(t)d\psi(t), \quad (34)$$

gdzie: $q(t) = \int i(t)dt$ oznacza ładunek, a $\psi(t) = \int v(t)dt$ - strumień magnetyczny źródła.

Z postaci wyrażenia (34) wynika, że pole powierzchni ograniczonej pętlą na fazowej płaszczyźnie energii o współrzędnych $(v(t), q(t))$ lub równoważnie $(\psi(t), i(t))$ określa energię jednookresową W_T pobraną przez odbiornik ze źródła, gdy współdziałają one w stanie okresowym niesinusoidalnym.

Rozpatrując kontakt koło-szyna w płaszczyźnie pionowej można zauważyć, że na szynę ze strony koła działa pionowa siła nacisku mająca charakter sygnału okresowego

$$F(t) = f(t + T), \quad (35)$$

gdzie: okres T odpowiada przedziałowi czasu do przyjechania koła w następnym wagonie, $T = \Delta x/v$, v – prędkość wzdłuż toru.

W płaszczyźnie pionowej prostopadłej do szyny układ dynamiczny kontaktu tocznego można opisać następującym układem równań

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 y_1}{dt^2} + b_1 \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} + k_1 (y_1 - y_2) &= 0 \\
 M \frac{d^2 y_2}{dt^2} + b_2 \frac{d(y_2 - y_1)}{dt} + k_2 (y_2 - y_1) &= F(t)
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

gdzie: zmienne $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$, m , b_1 , k_1 związane są z podkładem, a M , b_2 , k_2 z szyną.

Korzystając z koncepcji badania procesów energetycznych na fazowej płaszczyźnie energii stosowanej do analizy obwodów elektrycznych, energię jedookresową dla badanego przypadku można w oparciu o wzór (34) przedstawić następującą zależnością

$$W_T = \int_0^T F w dt = \int_{y(0)}^{y(T)} F dy_2, \quad w = \frac{dy_2}{dt}.
 \tag{37}$$

Z postaci wyrażenia (37) wynika, że pole powierzchni ograniczonej pętlą na fazowej płaszczyźnie energii o współrzędnych $(F(t), y_2(t))$ określa energię W_T przekazaną w jednym okresie. Korzystając analogii z opisem obwodu elektrycznego, siła $F(t)$ odpowiada wymuszeniu, czyli napięciu źródłowemu $v(t)$, a zmienna przemieszczenia $y(t)$ - chwilowemu ładunkowi $q(t)$ płynącemu w obwodzie.

6. WNIOSKI

W pracy przedstawiono efektywne metody modelowania przydatne w badaniach zagadnień w układzie pojazd szynowy – tor. Sposoby obliczeniowe opracowanych metod zostały tak skonstruowane, aby zaadaptować narzędzia obliczeniowe stosowane w analizie obwodów elektrycznych. Metoda identyfikacji źródeł pola przy użyciu wielomianów monicznych może znaleźć zastosowanie w identyfikacji źródeł ciepła w szynie spowodowanych kontaktem tocznym koło-szyna. Metoda identyfikacji źródeł przy użyciu funkcjonału mocy może znaleźć zastosowanie w przypadku posiadania danych pomiarowych tylko z brzegu badanego obszaru. Należy podkreślić, że użycie funkcjonału mocy jako narzędzia obliczeniowego, jak też koncepcja energii jedookresowej stanowi przykład stosowania bardziej ogólnych metod konstruowanych przy wykorzystaniu dorobku nauk ścisłych tzn. odwołujących się do podstawowych zasad obowiązujących w fizyce, jak zasada zachowania energii, czy zasady termodynamiki.

7. LITERATURA

- [1] Groetsch Ch. W.: *Inverse Problems in Mathematical Sciences*. Vieweg, Braunschweig/Wiebaden 1992.
- [2] Kłos. A., Trzaska Z.: *Modelowanie sieci elektrycznych*. Wyd. Inst. Technologii Eksploatacji, Warszawa 2007.
- [3] Potter D.: *Metody obliczeniowe fizyki*. PWN, Warszawa 1977.
- [4] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Application of inverse problems modelling to design and utilize rail vehicles. *Proc. International Conference on Transport of the 21st Century*, Stare Jabłonki, September 2007, Vol. 2, pp. 169-174.
- [5] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: The Simulation Method used to solve engineering inverse problems. *Proc. 6th Vienna Intern. Conf. MATHMOD9*, Vienna, Feb. 2009, Vol. of Abstracts, Argesim Report No. 34, p. 451, Full Paper Argesim Report No. 35.

-
- [6] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Application of numerical methods of field sources identification to selected issues in rail vehicle – track systems. *Prace Naukowe PW, Transport*, Z. 71/2009, pp. 196-205.
- [7] E. Rydygier, Z. Strzyżakowski.: Efektywne metody identyfikacji w inżynierii kolejowej. *Symulacja w Badaniach i Rozwoju*, Vol. 1, No 1/2010, str. 73-83.
- [8] Trzaska Z.: *Analiza i projektowanie obwodów elektrycznych*. Ofic. Wyd. P.W. 2008.
- [9] Vajda S.: *Fibonacci and Lucas Numbers*. E. Hornwood Ltd, Chichester 1989.