

Edward RYDYGIER¹
Zygmunt STRZYŻAKOWSKI²

EFEKTYWNE METODY MODELOWANIA UŻYTECZNE W EKSPLOATACJI POJAZDÓW SZYNOWYCH

Przedstawione w pracy wyniki badań dotyczą opracowania efektywnych metod modelowania użytecznych w eksploatacji pojazdów szynowych. Szczególną uwagę poświęcono rozwiązaniu zagadnienia identyfikacji źródeł pola. Do tego celu służy numeryczna metoda symulacyjna wykorzystująca narzędzia obliczeniowe z obszaru analizy kombinatorycznej uzupełnione procedurami regularyzującymi. Inną metodą jest optymalizacja za pomocą funkcjonału mocy. Rozpatrywane pola fizyczne są opisane równaniem różniczkowym Poissona, zatem w eksploatacji pojazdów szynowych opracowane metody mogą być przydatne w badaniu zagadnień cieplnych i wytrzymałościowych, jak np. identyfikacja parametrów naprężeń dla skręcania szyny kolejowej przy wymuszeniach siłowych oraz identyfikacja źródeł ciepła w szynie spowodowanych kontaktem tocznym. Wyniki identyfikacji źródeł ciepła w szynie spowodowane kontaktem tocznym koło-szyna mogą zostać wykorzystane do weryfikacji cech mechanicznych kontaktu. Przedstawiono także oryginalną metodę modelowania dynamiki kontaktu koło-szyna dla siły wertykalnej w oparciu o pojęcie energii jednookresowej stosowane w badaniach obwodów elektrycznych.

EFFECTIVE MODELLING METHODS USED IN EXPLOITATION RAIL VEHICLES

In this paper there are presented results of investigations regarding a construction computational methods useful in exploitation rail vehicles. One of them is the field sources identification method constructed with the use of the computational tools from the combinational analysis and supplemented by a special regularization procedure. Another method is the optimization procedure with the use of the power functional. These methods are applied to identity tension parameters of torsion of a rail or to identity heat sources in a term trace in a rail generated by the wheel-rail rolling contact. Results of these investigations can be used to verify mechanical properties of a rolling contact. Also there is presented the dynamical modelling method which is useful to study a wheel-rail contact for vertical forces. This method is constructed with the use of the one period energy concept from the electrical engineering.

¹ Politechnika Radomska, Wydział Transportu i Elektrotechniki,
MacLeod Institute of Simulation Sciences, Satellite Center at the Technical University of Radom,
Radom 26-600; ul. Malczewskiego 29. Tel. 22 338-94-40, E-mail: rydygier@o2.pl

² Politechnika Radomska, Wydział Transportu i Elektrotechniki; Instytut Automatyki i Telematyki,
MacLeod Institute of Simulation Sciences, Satellite Center at the Technical University of Radom,
Radom 26-600; ul. Malczewskiego 29. Tel. 48 361-77-15, E-mail: zstrz@data.pl

1. WSTĘP

Modelowanie układów rozpatrywanych w inżynierii kolejowej jest przydatne zarówno w eksploatacji, jak i w projektowaniu pojazdów szynowych [6, 9]. W pracy przedstawiono efektywne metody identyfikacji dotyczące zagadnień polowych opisanych cząstkowymi równaniami różniczkowymi drugiego rzędu (układy 2-D). Szczególną uwagę poświęcono zagadnieniu identyfikacji źródeł pola. Ponieważ w modelowaniu układów dynamicznych zagadnienie identyfikacji stanowi problem odwrotny, który zawiera się w klasie problemów niepoprawnie sformułowanych, uzyskane rozwiązania mogą być niestabilne [1]. W celu ustabilizowania wyników opracowane metody obliczeniowe rozwiązania zagadnienia identyfikacji zostały uzupełnione o odpowiednie procedury stabilizacyjne. Przedstawiono także metodę identyfikacji źródeł pola za pomocą funkcjonału mocy, który jest narzędziem obliczeniowym wziętym z modelowania sieci elektrycznych. Metoda ta służy do identyfikacji źródeł przez optymalizację funkcjonału mocy. Ponadto w pracy zaprezentowano oryginalną metodę modelowania dynamiki kontaktu koło - szyna dla siły wertykalnej.

2. METODY IDENTYFIKACJI ŹRÓDEŁ POLA

2.1 Opis układu

Identyfikacja źródeł dotyczy układu opisanego równaniem Poissona [5] ze znanymi warunkami brzegowymi $u|_{\Gamma}$ na brzegu Γ badanego obszaru

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (1)$$

gdzie: $x \in (0, l_x)$, $y \in (0, l_y)$,

$u = u(x, y) \in R^2$ – funkcja polowa,

$f = f(x, y) \in R^2$ – funkcja rozkładu źródeł (funkcja źródłowa).

Rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł pola opisanego równaniem (1) polega na wyznaczeniu funkcji rozkładu źródeł. Aby rozwiązać ten problem numerycznie należy przybliżyć ciągły opis układu modelem dyskretnym. Po zamianie zmiennych ciągłych na dyskretne, co w przypadku prostokątnej siatki podziału badanego obszaru o wymiarach $l_x \times l_y$ dokonujemy następująco $x = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, M$, $y = jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$, $M = l_x/h$, $N = l_y/h$, h - długość kroku dyskretyzacji, równanie różniczkowe (1) może zostać przybliżone równaniem różnicowym. Przybliżenie za pomocą schematu różnic skończonych [5] sprowadza się do uzyskania układu równań algebraicznych wiążących wartości funkcji polowej u i źródłowej f w węzłach siatki w następujący sposób

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = h^2 f(i, j) = q_{i,j}, i=1, 2, \dots, M, j=1, \dots, N, \quad (2)$$

gdzie: $u_{i,j} = u(i, j)$, $q_{i,j} = q(i, j)$.

Warunki brzegowe dla równania (2) przyjmują postać

$$u(0, j) = U_0(j), \quad u(M, j) = U_M(j), \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (3)$$

$$u(i, 0) = U_0(i), \quad u(i, N) = U_N(i), \quad i = 0, 1, \dots, M.$$

Dla modelu dyskretnego 2-D rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł polega na wyznaczeniu wartości funkcji źródłowej $q(i, j)$ w węzłach siatki.

W celu rozwiązania opisanego w powyższy sposób problemu została opracowana specjalna metoda numeryczna przy użyciu symulacji komputerowych, którą nazwano Metodą Symulacyjną [8]. Symulacje komputerowe użyto zarówno do testowania metody, jak i przy wyznaczaniu współczynnika regularyzacji. Aby zapewnić prostotę i efektywność metody jej algorytmy zostały opracowane przy użyciu specjalnych narzędzi obliczeniowych skonstruowanych w oparciu o sposoby i obiekty wzięte z nowoczesnej analizy kombinatorycznej. Wykorzystano w szczególności moniczne wielomiany potęgowe o współczynnikach generowanych przez zmodyfikowane trójkąty obliczeniowe. W obliczeniach zostały użyte dwa rodzaje zmodyfikowanych trójkątów obliczeniowych [3]. Elementy pierwszego zmodyfikowanego trójkąta obliczeniowego *MNT1* można wyznaczyć za pomocą następującej formuły rekurencyjnej

$$a_{n,k} = 2a_{n-1,k} + a_{n-1,k-1} - a_{n-2,k}, \quad a_{0,0} = 1, \quad a_{1,0} = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq k \leq n \quad (4)$$

Zdefiniowany w powyższy sposób trójkąt obliczeniowy generuje moniczne wielomiany pierwszego rodzaju $T_n(q)$ dla $q \in R$ zdefiniowane za pomocą formuły rekurencyjnej

$$T_{n+2}(q) = (2 + q)T_{n+1}(q) - T_n(q), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad T_0(q) = 1, \quad T_1(q) = 1 + q, \quad (5)$$

w następujący sposób $T_n(q) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} q^k$, $n = 0, 1, 2, \dots$. (6)

Korzystając z elementów pierwszego trójkąta obliczeniowego *MNT1* (4) wyznaczono przykładowo kilka wielomianów monicznych pierwszego rodzaju $T_n(q)$:

$$\begin{aligned} T_0(q) &= 1 \\ T_1(q) &= 1 + q \\ T_2(q) &= 1 + 3q + q^2 \\ T_3(q) &= 1 + 6q + 5q^2 + q^3 \\ T_4(q) &= 1 + 10q + 15q^2 + 7q^3 + q^4 \\ T_5(q) &= 1 + 15q + 35q^2 + 28q^3 + 9q^4 + q^5. \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Elementy drugiego zmodyfikowanego trójkąta obliczeniowego *MNT2* mogą zostać wyznaczone za pomocą następującej formuły rekurencyjnej

$$b_{n,r} = 2b_{n-1,r} + b_{n-1,r-1} - b_{n-2,r}, \quad b_{0,0} = 0, \quad b_{1,0} = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq r \leq n. \quad (7)$$

Trójkąt liczbowy *MNT2* generuje moniczne wielomiany drugiego rodzaju $P_n(q)$ dla $q \in R$ zdefiniowane za pomocą formuły rekurencyjnej

$$P_{n+2}(q) = (2 + q)P_{n+1}(q) - P_n(q), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad P_0(q) = 0, \quad P_1(q) = 1, \quad (8)$$

w następujący sposób
$$P_n(q) = \sum_{r=0}^n b_{n,r} q^r, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Wykorzystując elementy drugiego trójkąta obliczeniowego *MNT2* (7) wyznaczono kilka wielomianów monicznych drugiego rodzaju $P_n(q)$:

$$\begin{aligned} P_0(q) &= 0 \\ P_1(q) &= 1 \\ P_2(q) &= 2 + q \\ P_3(q) &= 3 + 4q + q^2 \\ P_4(q) &= 4 + 10q + 6q^2 + q^3 \\ P_5(q) &= 5 + 20q + 21q^2 + 8q^3 + q^4 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Ciekawą prawidłowością charakteryzującą konstrukcję zmodyfikowanych trójkątów obliczeniowych jest to, że sumy elementów w wierszach pierwszego i drugiego trójkąta są równe odpowiednio parzystym f_{2n} , $n = 0, 1, 2, \dots$, lub nieparzystym f_{2n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots$, wyrazom ciągu Fibonacciego zdefiniowanego za pomocą następującej formuły

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

dla wyrazów początkowych $f_0 = 1$ i $f_1 = 1$.

2.1 Rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł

Funkcja źródłowa aproksymowana dyskretnym rozkładem Fourier'a [5] ma postać

$$f_{m,n} = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{N-1} F_m(k) \sin \frac{k\pi n}{N}, \quad f_{m,0} = f_{m,N} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (11)$$

gdzie n jest parametrem, $F(k)$ oznacza współczynniki rozkładu dla $k = 1, 2, \dots, N-1$. Podobnie została rozwinięta funkcja polowa

$$u_{m,n} = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{N-1} U_m(k) \sin \frac{k\pi n}{N}, \quad u_{0,n} = u_{M,n} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (12)$$

Równanie (2) zapisane przy użyciu współczynników rozkładu Fourier'a przyjmuje następującą formę

$$\frac{1}{h^2} \left[(U_{m+1}(k) - 2U_m(k) + U_{m-1}(k)) - (4 \sin^2 \frac{k\pi}{2N}) U_m(k) \right] = F_m(k), \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (13)$$

z warunkami brzegowymi określonymi przez $U_0(k) = 0$ oraz wartości $U_M(k)$ wyznaczone z równości $u_{M,n} = 0$, $n = 1, \dots, N$.

Po podstawieniu wielomianu $P(q_k)$ (8) dla $q_k = 4 \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2N}$ do (13) rozwiązanie problemu prostego przyjmuje formę

$$U_m(k) = P_m(q_k)U_1(k) + \sum_{l=1}^{m-1} P_{m-l}(q_k)h^2 F_l(k), \quad m = 2, 3, \dots, M-1. \quad (14)$$

Wartości $U_1(k)$ w równaniu (14) można wyznaczyć z warunków brzegowych (12). Dla $N = M$ z układu $M-1$ równań można wyznaczyć zestaw współczynników $U_M(k)$, $k = 1, 2, \dots, M-1$. Następnie przez podstawienie tych współczynników do równania (13) dla $m = M$, można otrzymać zestaw współczynników $U_1(k)$ dla $k = 1, 2, \dots, M-1$.

Rozwiązanie problemu odwrotnego wyznaczone przy użyciu monicznych wielomianów $P(q_k)$ przyjmuje następującą postać:

$$F_l(k) = \frac{U_{l+1}(k) - P_{l+1}(q_k)U_1(k) - \sum_{i=1}^{l-1} P_{l+1-i}(q_k)h^2 F_i(k)}{P_l(q_k)h^2}. \quad (15)$$

Funkcja źródłowa odtworzona ze współczynników rozkładu (15) według formuły (11) stanowi rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł pola. Problem odwrotny zawiera się w klasie problemów źle postawionych w sensie definicji Hadamarda [1] problemów poprawnie sformułowanych i dlatego metody rozwiązania zagadnienia prostego mogą okazać się nie odpowiednie do rozwiązania zagadnienia odwrotnego. W celu zapewnienia stabilności Metoda Symulacyjna została uzupełniona o specjalną numeryczną procedurę aproksymacyjną opracowaną na podstawie metody odwrotnych odległości używaną do wygładzania danych w układach 2-D. Ten sposób zapewnienia stabilizacji stanowi rodzaj samoregulacji [7].

2.3 Metoda identyfikacji za pomocą funkcjonału mocy

Oryginalnym sposobem identyfikacji źródeł pola jest rozwiązanie zagadnienia optymalizacji przez wyznaczenie ekstremum funkcjonału mocy. W odniesieniu do różnicowej postaci równania Poissona (2), funkcjonał mocy dla układu 2-D można zdefiniować następująco [9]

$$F = \sum_{i,j=1} F_{i,j} = \sum_{i,j=1} \left[\frac{1}{2} [(u_{i,j} - u_{i+1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j+1})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j-1})^2] - u_{i,j} q_{i,j} \right] \quad (16)$$

Funkcjonał w postaci powyższej formuły (16) został nazwany funkcjonałem mocy przez analogię do zagadnienia obwodowego w elektrotechnice [3]. Jeśli zamiast siatki prostokątnej dyskretyzującej badany obszar rozpatrzona zostanie sieć rezystancyjna, to wówczas funkcjonał mocy określa moc w obwodzie. Dla sieci rezystancyjnej zawierającej oporniki jednakowej konduktancji $G=R^{-1}$, funkcjonał mocy dla sieci o węzłach w punktach $(i-1, j)$, (i, j) , $(i, j+1)$, $(i, j-1)$, $(i+1, j)$ przybiera postać

$$F_{i,j} = \frac{1}{2}G[(V_{i,j} - V_{i+1,j})^2 + (V_{i,j} - V_{i-1,j})^2 + (V_{i,j} - V_{i,j+1})^2 + (V_{i,j} - V_{i,j-1})^2] - V_{i,j}I_{i,j}, \quad (17)$$

gdzie: $I_{i,j}$ oznacza natężenie prądu źródła prądowego dołączonego w węźle (i, j) ,

$V_{i,j}$ - napięcie w węźle (i, j) , $V_{i+1,j}$ - napięcie w węźle $(i+1, j)$,

$V_{i,j+1}$ - napięcie w węźle $(i, j+1)$, $V_{i,j-1}$ - napięcie w węźle $(i, j-1)$.

Funkcjonał mocy (17) jest skonstruowany z dwóch składowych. Pierwsza składowa jest określona jako połowa sumy mocy elementów pasywnych, a druga składowa - mocą źródła prądowego. Przyjmując $G = 1S$, $q_{i,j} = I_{i,j}$, $u_{i,j} = V_{i,j}$ oraz sumując po indeksach i, j otrzymujemy wyrażenie (16). Po wyznaczeniu z równania (2) potencjałów „pośrednich”, tzn. służących do obliczeń pośrednich przy znanych wartościach potencjałów na brzegu obszaru i przez podstawienie ich do równania (16) uzależniono funkcyjonał mocy od źródeł $q_{i,j}$, które stanowią zmienne niezależne. Rozwiązanie zagadnienia optymalizacji za pomocą funkcyjonału mocy (16) polega na wyznaczeniu minimum funkcyjonału F dla dyskretnych wartości $q_{i,j}$. W pojęciach rzeczywistego funkcyjonału kwadratowego $F = F(q_1, q_2, \dots, q_n)$, gdzie n - ilość źródeł, poszukiwany zestaw źródeł $q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*$ wyznacza się jako punkt stacjonarny funkcyjonału przez obliczenie jego gradientu i przyrównaniu go do zera

$$\nabla F = 0. \quad (18)$$

Funkcjonał kwadratowy w postaci macierzowej można przedstawić następująco

$$F = A_0 + \mathbf{B}^t \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{C} \mathbf{q}, \quad (19)$$

gdzie: górny indeks t oznacza transpozycję, A_0 i składowe wektora \mathbf{B} stanowią wyrazy skalarne, a macierz \mathbf{C} jest macierzą kwadratową.

Stosując regułę obliczania gradientu funkcyjonału kwadratowego, wyznaczamy gradient funkcyjonału w postaci

$$\nabla F = \mathbf{B} + \mathbf{C} \mathbf{q}. \quad (20)$$

Porównując gradient (20) do zera wyznaczamy punkt stacjonarny funkcyjonału mocy F

$$\mathbf{q}^* = -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}. \quad (21)$$

Funkcyjonał mocy służący do wyznaczania stanu sieci elektrycznej został w niniejszej pracy zastosowany do identyfikacji źródeł w układach 2-D opisanych równaniem Poissona (2). Identyfikacja źródeł przez wyznaczenie punktu stacjonarnego funkcyjonału mocy dla układu 2-D zostanie zilustrowana następującymi przykładami.

Przykład 1

Dla układu 2-D przyjmujemy dyskretyzację badanego obszaru siatką kwadratową dla $N = M = 2$. Potencjał pośredni $u(1, 1) = V_1$, natomiast V_2, V_3, V_4, V_5 oznaczają potencjały graniczne. Wówczas funkcyjonał mocy zgodnie ze wzorem (3) możemy zapisać w postaci

$$F(q_1) = \frac{1}{2} [(V_1 - V_2)^2 + (V_1 - V_3)^2 + (V_1 - V_4)^2 + (V_1 - V_5)^2] - V_1 q_1.$$

Równanie różnicowe Poissona przyjmuje następującą postać

$$V_5 - 2V_1 + V_3 + V_4 - 2V_1 + V_2 = q_1, \text{ skąd wyznaczamy } V_1 = \frac{1}{4} (V_2 + V_3 + V_4 + V_5 - q_1).$$

Po podstawieniu $V_1(q_1)$ do wzoru na F i pogrupowaniu wyrazów z odpowiednimi potęgami q_1 otrzymujemy

$$F(q_1) = A - \frac{1}{4} (V_2 + V_3 + V_4 + V_5) q_1 + \frac{3}{8} q_1^2, \text{ gdzie } A - \text{ wyraz wolny, następnie różniczkujemy}$$

$$\frac{dF}{dq_1} = -\frac{1}{4} (V_2 + V_3 + V_4 + V_5) + \frac{3}{4} q_1 = 0, \quad \text{skąd } q_1^* = \frac{1}{3} (V_2 + V_3 + V_4 + V_5).$$

Przykład 2

Dla układu 2-D przyjmujemy dyskretyzację badanego obszaru siatką kwadratową dla $N=M=3$. Potencjały pośrednie położone w węzłach wewnętrznych oznaczmy przez V_1, V_2, V_3, V_4 , wartości znanych potencjałów brzegowych przez $V_5, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10}, V_{11}, V_{12}$, natomiast nieznanne wartości funkcji źródłowej w wewnętrznych węzłach przez q_1, q_2, q_3, q_4 . Wówczas różnicowe równanie przybliżające równanie różniczkowe Poissona przyjmuje w zapisie macierzowym następującą postać

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_5 + V_{12} \\ V_{10} + V_{11} \\ V_6 + V_7 \\ V_8 + V_9 \end{bmatrix}$$

skąd

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_5 + V_{12} \\ V_{10} + V_{11} \\ V_6 + V_7 \\ V_8 + V_9 \end{bmatrix}.$$

Funkcjonał mocy zgodnie ze wzorem (16) przyjmuje postać

$$F = \frac{1}{2} [(V_1 - V_5)^2 + (V_1 - V_{12})^2 + (V_1 - V_2)^2 + (V_1 - V_3)^2 + (V_3 - V_6)^2 + (V_3 - V_7)^2 + (V_3 - V_4)^2 + \dots \\ \dots + (V_4 - V_8)^2 + (V_4 - V_9)^2 + (V_4 - V_{10})^2 + (V_2 - V_{10})^2 + (V_2 - V_{11})^2] - V_1 q_1 - V_2 q_2 - V_3 q_3 - V_4 q_4.$$

Gdy wprowadzimy oznaczenia

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{R}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} V_5+V_{12} \\ V_{10}+V_{11} \\ V_6+V_7 \\ V_8+V_9 \end{bmatrix}, \quad \text{to} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}.$$

Po podstawieniu wyznaczonych powyżej potencjałów pośrednich do wzoru na funkcjonal mocy otrzymamy funkcjonal w postaci formy kwadratowej

$$F = A_0 + [B_1, B_2, B_3, B_4] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [q_1, q_2, q_3, q_4] \mathbf{C} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad \text{skąd} \quad \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \end{bmatrix} = -\mathbf{C}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}.$$

2.4 Zastosowania metod identyfikacji źródeł pola

W eksploatacji pojazdów szynowych metody identyfikacji źródeł mogą znaleźć zastosowanie w badaniu skręcenia szyny kolejowej. Identyfikacji źródeł pola naprężeń szyny kolejowej wywołanych jej skręcaniem przy wymuszeniach siłowych dokonano przyjmując, że deformacje szyny podlegają prawom Hooke'a [2, 10]. Zagadnienie skręcania szyny dla układu 2-D można przedstawić za pomocą ekwiwalentnego równania o postaci [2]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = F, \quad (22)$$

gdzie: ψ - funkcja pomocnicza,

$F = -\theta G$ oznacza stałą funkcję źródłową,

θ - kąt skręcenia, czyli kąt obrotu na jednostkę długości,

G - moduł sprężystości poprzecznej.

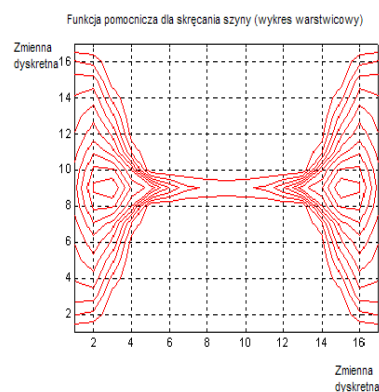
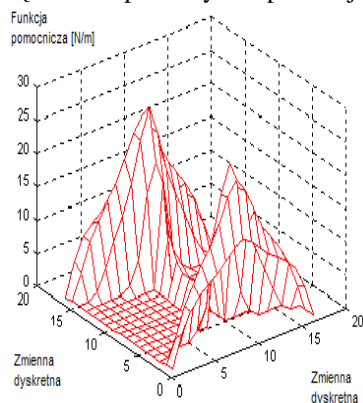
Badany obszar stanowi pole przekroju poprzecznego szyny, wartości funkcji ψ na brzegu obszaru D są zerowe, oś z usytuowana jest wzdłuż długości szyny. Zakładamy, że skręcaniu nie towarzyszy zmiana objętości, co oznacza, że powoduje ono deformację czystego ścinania. Dla tych warunków funkcja pomocnicza ψ jest zdefiniowana za pomocą składowych tensora naprężeń [10]

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (23)$$

Między momentem sił M działającym na kraniec $z = l$ i funkcją pomocniczą ψ istnieje następujący związek

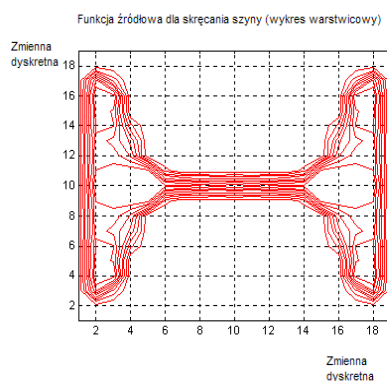
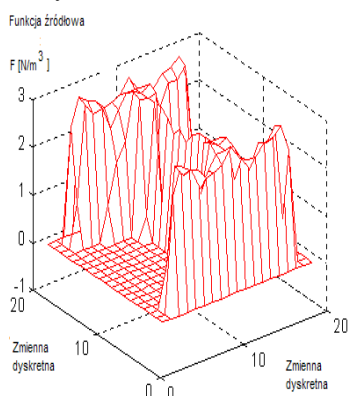
$$M = 2 \iint_D \psi dx dy. \quad (24)$$

Dane wejściowe (rys. 1 i rys. 2) odpowiadają funkcji pomocniczej $\psi(x, y)$ związanej z kątem skręcenia na płaszczyźnie przekroju poprzecznego.



Rys. 1. Dane wejściowe (funkcja pomocnicza ψ). Rys. 2. Wykres warstwiczny.

Wyniki badań dla szyny kolejowej opisanej modelem Timoshenki [10] są przedstawione na rys. 3 do rys. 4.

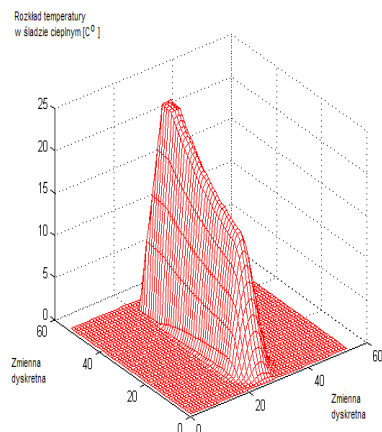


Rys. 3. Funkcja źródłowa dla skręcenia szyny. Rys. 4. Wykres warstwiczny.

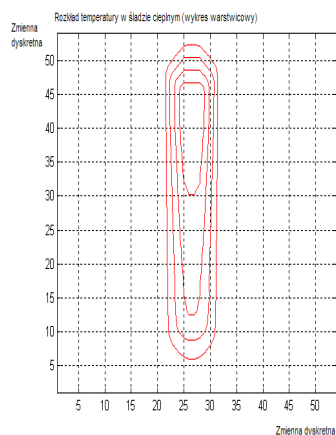
Wyznaczona przy użyciu metody symulacyjnej funkcja źródłowa przyjmuje wartość stałą obszarze przekroju poprzecznego zgodnie z rozwiązaniem analitycznym problemu odwrotnego opisanego równaniem Poisson'a (22).

Metody identyfikacji źródeł pola mogą być także użyteczne w badaniu zagadnień przepływu ciepła [7]. Jeśli rozpatrywane zagadnienie przepływu ciepła można sprowadzić do opisu równaniem Poisson'a, wówczas w opisie zagadnienia wzorem (1) należy uwzględnić, że funkcją połową jest funkcja rozkładu temperatury $T(x, y)$ opisująca pole temperatury wewnątrz badanego obszaru. Wykorzystując opracowaną Metodę Symulacyjną dokonano identyfikacji źródeł śladu cieplnego w szynie kolejowej spowodowanego kontaktem tocznym koło - szyna [9]. Jako dane wejściowe przyjęto rozkłady temperatury w

śladzie cieplnym na powierzchni toczonej szyny wyznaczone z badań modelowych przewodzenia i wymiany ciepła w szynie przeprowadzonych przez zespół kierowany przez prof. J. Piotrowskiego z Politechniki Warszawskiej [4]. Przykładowe rozkłady temperatury w śladzie cieplnym w szynie przedstawiono na rys. 5 i rys.6.

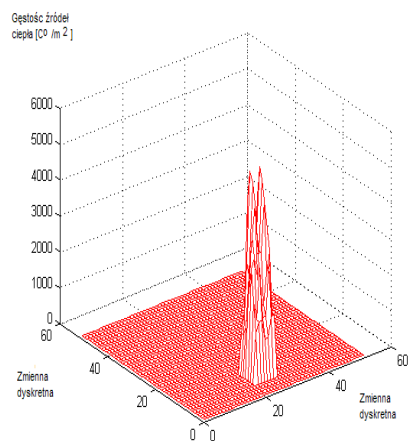


Rys. 5. Rozkład temperatury w śladzie cieplnym.

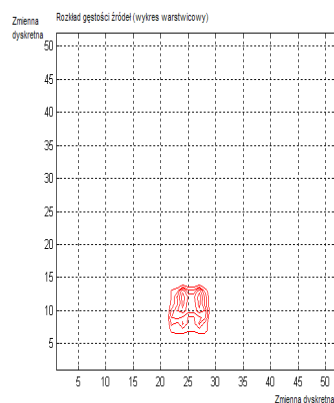


Rys. 6. Wykres warstwiczny.

Natomiast wyniki obliczeń wykonanych przy pomocy Metody Symulacyjnej w formie rozkładów gęstości źródeł ciepła zostały zilustrowane na rys. 7 i rys.8.



Rys. 7. Wyznaczona funkcja źródłowa.



Rys. 8. Wykres warstwiczny.

Należy podkreślić, że identyfikacja źródeł w śladzie cieplnym w szynie wywołanym kontaktem toczonego koła - szyna może posłużyć do identyfikacji parametrów układu dynamicznego tor - pojazd szynowy umożliwiającej weryfikację cech mechanicznych

kontaktu oraz wyznaczenie lokalnych naprężeń, poślizgów, gęstości mocy tarcia [4]. Ponieważ kontakt toczny koło - szyna wywołuje skutki cieplne na powierzchni szyny, zatem można wyznaczyć wielkości mechaniczne wywołujące obserwowane pole temperatury. Inaczej zagadnienie to można sformułować w następujący sposób: badanie kontaktu tocznego koło - szyna przy zastąpieniu modelu mechanicznego przez model cieplny kontaktu.

3. MODELOWANIE DYNAMIKI KONTAKTU KOŁO-SZYNA

3.1 Energia jednookresowa

Pojęcie energii jednookresowej stosowane jest w analizie w czasie rzeczywistym procesów energetycznych w obwodach elektrycznych [11] w stanie okresowym niesinusoidalnym. Procesy energetyczne można wówczas badać na płaszczyźnie fazowej energii oraz oceniać je na podstawie zmian chwilowego napięcia i prądu związanych z danym elementem obwodu w ciągu jednego okresu. Biorąc pod uwagę dwójnik dynamiczny działający w stanie okresowym niesinusoidalnym, dla którego sygnałem wymuszenia będzie napięcie $v(t) = v(t + T)$, T - okres, a odpowiedzią prąd $i(t) = i(t + T)$, energię oddaną przez źródło $v(t)$ do odbiornika w przedziale czasu $\Delta t = nT$, $n \in \mathbb{N}$, określamy wyrażeniem

$$W(\Delta t) = nW_T, \quad (25)$$

gdzie: W_T oznacza energię jednookresową, tzn. energię dostarczoną do odbiornika podczas jednego okresu wymuszenia i odpowiedzi.

Zatem w stanie okresowym niesinusoidalnym wyznaczenie energii pobranej ze źródła przez odbiornik w danym przedziale czasu $\Delta t = nT$ można sprowadzić do określenia energii jednookresowej W_T , a następnie pomnożenia przez n . Dla badanego zagadnienia W_T wynosi

$$W_T = \int_0^T v(t)i(t)dt = \int_0^T v(t) \frac{d}{dt} \left(\int i(\tau)d\tau \right) dt = \int_{q(0)}^{q(T)} v(t)dq(t) = \int_{\psi(0)}^{\psi(T)} i(t)d\psi(t), \quad (26)$$

gdzie: $q(t) = \int i(t)dt$ oznacza ładunek, a $\psi(t) = \int v(t)dt$ - strumień magnetyczny źródła.

Z postaci wyrażenia (25) wynika, że pole powierzchni ograniczonej pętlą na fazowej płaszczyźnie energii o współrzędnych $(v(t), q(t))$ lub równoważnie $(\psi(t), i(t))$ określa energię jednookresową W_T pobraną przez odbiornik ze źródła, gdy współdziałają one w stanie okresowym niesinusoidalnym.

Gdy $v(t) = |V|\sqrt{2} \cos(\omega t)$ jest harmonicznym napięciem źródłowym, to prąd jako odpowiedź w obwodzie można przedstawić w postaci $i(t) = |I|\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$, gdzie φ oznacza argument impedancji dwójnika $Z = R + jX$, $|V|$ - wartość skuteczną napięcia, $|I| = |V|/Z$ - wartość skuteczną prądu. Gdy prąd chwilowy $i(t)$ przyjmiemy jako jedną z współrzędnych fazowej płaszczyzny energii, wówczas strumień magnetyczny

$\psi(t) = \int v(t) dt = \frac{|V|\sqrt{2}}{\omega} \sin(\omega t)$ powinien być drugą współrzędną tej płaszczyzny. W tym przypadku

$$W_T = \int_{\psi(0)}^{\psi(T)} i(t) d\psi(t). \quad (27)$$

Aby wyznaczyć wyrażenie określające pętlę energii jednookresowej należy uzależnić sygnał $i(t)$ od $\psi(t)$ przez wyeliminowanie zmiennej t , co można uzyskać przez podstawienie

$$\cos(\omega t) = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega\psi(t)}{|V|\sqrt{2}} \right)^2}, \text{ gdzie } \frac{\omega\psi(t)}{|V|\sqrt{2}} = \sin(\omega t), \text{ do wzoru na } i(t). \text{ W rezultacie tego}$$

podstawienia otrzymujemy

$$x^2(t) + y^2(t) - 2x(t)y(t)\sin\varphi = \cos^2\varphi, \quad (28)$$

gdzie: $x(t) = i(t)/|I|\sqrt{2}$, $y(t) = \omega\psi(t)/|V|\sqrt{2}$ nowe zmienne bezwymiarowe prądu i strumienia. Zatem na płaszczyźnie $(x(t), y(t))$ pętla energii jednookresowej przyjmuje postać elipsy. Przez obrót układu współrzędnych o kąt $\alpha = \pi/4$ otrzymujemy równanie elipsy we współrzędnych kanonicznych $(x(t)', y(t)')$, gdzie a, b oznaczają długości półosi

$$\left(\frac{x'(t)}{a} \right)^2 + \left(\frac{y'(t)}{b} \right)^2 = 1, \quad a = \cos\varphi / \sqrt{1 + \sin\varphi}, \quad b = \cos\varphi / \sqrt{1 - \sin\varphi}.$$

Wracając do współrzędnych $(\psi(t), i(t))$ pętlę energii jednookresowej zapisujemy równaniem

$$\left(\frac{i(t)}{a} \right)^2 + \left(\frac{\psi(t)}{b} \right)^2 = 1, \quad a = \frac{|I|\sqrt{2} \cos\varphi}{\sqrt{1 + \sin\varphi}}, \quad b = \frac{|V|\sqrt{2} \cos\varphi}{\omega\sqrt{1 - \sin\varphi}}. \quad (29)$$

Energję jednookresową można wyznaczyć jako pole powierzchni elipsy (28)

$$W_T = \pi ab = \frac{2\pi|V||I|\cos^2\varphi}{\omega\sqrt{1 - \sin^2\varphi}} = T|V||I|\cos\varphi, \quad (30)$$

gdzie: $T = 2\pi/\omega$ oznacza okres harmonicznego sygnału na wejściu dwójnika.

3.2 Energia jednookresowa w modelowaniu kontaktu koło-szyna

Rozpatrując kontakt koło-szyna w płaszczyźnie pionowej można zauważyć, że na szynę ze strony koła działa pionowa siła nacisku mająca charakter sygnału okresowego

$$F(t) = f(t + T) \quad (31)$$

gdzie: okres T odpowiada przedziałowi czasu do przyjechania koła w następnym wagonie, $T = \Delta x/v$, v – prędkość wzdłuż toru.

W płaszczyźnie pionowej prostopadłej do szyny układ dynamiczny kontaktu tocznego można opisać następującym układem równań

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y_1}{dt^2} + b_1 \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} + k_1 (y_1 - y_2) &= 0 \\ M \frac{d^2 y_2}{dt^2} + b_2 \frac{d(y_2 - y_1)}{dt} + k_2 (y_2 - y_1) &= F(t) \end{aligned} \quad (32)$$

gdzie: zmienne $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$, m , b_1 , k_1 związane są z podkładem, a M , b_2 , k_2 z szyną.

Korzystając z koncepcji badania procesów energetycznych na fazowej płaszczyźnie energii stosowanej do analizy obwodów elektrycznych, energię jednoczesną dla badanego przypadku można w oparciu o wzór (25) przedstawić następującą zależnością

$$W_T = \int_0^T F w dt = \int_{y(0)}^{y(T)} F dy_2, \quad w = \frac{dy_2}{dt}. \quad (33)$$

Z postaci wyrażenia (33) wynika, że pole powierzchni ograniczonej pętlą na fazowej płaszczyźnie energii o współrzędnych $(F(t), y_2(t))$ określa energię W_T przekazaną w jednym okresie. Korzystając analogii z opisem obwodu elektrycznego, siła $F(t)$ odpowiada wymuszeniu, czyli napięciu źródłowemu $v(t)$, a zmienna przemieszczenia $y(t)$ - chwilowemu ładunkowi $q(t)$ płynącemu w obwodzie.

4. WNIOSKI

W pracy przedstawiono efektywne metody modelowania użyteczne w eksploatacji pojazdów szynowych. Ponieważ w modelowaniu układów wzięto pod uwagę pola fizycznych opisane równaniem różniczkowym Poissona, zatem w eksploatacji pojazdów szynowych opracowane metody mogą być przydatne w badaniu zagadnień cieplnych i wytrzymałościowych. Takimi zagadnieniami są np. identyfikacja parametrów naprężeń dla skręcania szyny kolejowej przy wymuszeniach siłowych oraz identyfikacja źródeł ciepła w szynie spowodowanych kontaktem tocznym. Wyniki identyfikacji źródeł ciepła w szynie spowodowane kontaktem tocznym koło-szyna mogą zostać zastosowane do weryfikacji cech mechanicznych kontaktu i w ten sposób wykorzystane w modelowaniu zjawisk dynamicznych układu mechanicznego, jaki stanowi układ pojazd szynowy-tor. W ten kierunek badań wpisuje się także opracowana przez autorów pracy oryginalna metoda modelowania dynamiki kontaktu koło-szyna dla siły wertykalnej. Metoda zwana dokładną, w odróżnieniu od metod przybliżonych, została skonstruowana w oparciu o pojęcie energii jednoczesnej stosowane w badaniu obwodów elektrycznych.

5. LITERATURA

- [1] Groetsch Ch. W.: *Inverse Problems in Mathematical Sciences*. Braunschweig/Wiebaden, Vieweg 1992.
- [2] Kącki E.: *Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki*. Warszawa, Wyd. N-T 1995.
- [3] Kłos. A., Trzaska Z.: *Modelowanie sieci elektrycznych*. Warszawa, Wyd. Inst. Technologii Eksploatacji 2007.

- [4] Nagórski Z., Piotrowski J.: Modelowanie pola temperatury w szynie wywołanego toczaniem się koła. *Zeszyty Instytutu Pojazdów Politechniki Warszawskiej* 4(39), 2000.
- [5] Potter D.: *Metody obliczeniowe fizyki*. Warszawa, PWN 1977.
- [6] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Application of inverse problems modelling to design and utilize rail vehicles. *Proc. International Conference on Transport of the 21st Century*, Stare Jabłonki, September 2007, Vol. 2, pp. 169-174.
- [7] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Effective computer methods used to solve engineering inverse problems. *Computer Systems Aided Science and Engineering Work in Transport, Mechanics and Electrical Engineering*, Monograph No. 122, Faculty of Transport, Technical University of Radom, 2008, pp. 493-499.
- [8] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: The Simulation Method used to solve engineering inverse problems. *Proc. 6th Vienna Intern. Conf. on Mathematical Modelling MATHMOD9*, Vienna, Feb. 2009, Vol. of Abstracts, Argesim Report No. 34, p. 451, Full Papers CD Volume, Argesim Report No. 35, Vienna University of Technology.
- [9] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Modelowanie kontaktu koło-szyna. *Proc. 13th International Conference 'Computer Systems Aided Science, Industry and Transport-TRANSCOMP2009'*, Volume of Abstracts, p. 223, Zakopane, November/December 2009, *Logistyka* 6/2009, Dział Logistyka-Nauka, str. 83, cały artykuł na płycie CD.
- [10] Timoshenko S., Goodier J. N.: *Teoria sprężystości*. Warszawa, Wyd. „Arkady”, 1962.
- [11] Trzaska Z.: *Analiza i projektowanie obwodów elektrycznych*. Ofic. Wyd. P.W. 2008.