

PEKSIŃSKI Jakub<sup>1</sup>  
MIKOŁAJCZAK Grzegorz<sup>2</sup>

## ZMODYFIKOWANY ALGORYTM WYGŁADZANIA WYKŁADNICZEGO O ZREDUKOWANYM POZIOMIE ZNIEKSZTAŁCENI SYGNAŁU UŻYTECZNEGO

*W pracy zaproponowano zmodyfikowany algorytm wygładzania wykładniczego, który minimalizuje wariancję zakłócenia przy jednoczesnym zachowaniu struktury pierwotnego sygnału. Oceny przydatności proponowanej metody dokonano wygładzając sygnał okresowy z trendem, zakłócony szumem o różnych rozkładach.*

## MODIFIED ALGORITHM EXPONENTIAL SMOOTHING WITH REDUCED DISTORTION SIGNAL USABLE

*In this paper a new algorithm of smoothing of digital signals is presented. Proposed algorithm is based on exponential smoothing and the moving average filter. For a given number of samples corrupted by additive noise, a new sequence of samples is calculated due to minimize the variation of noise. After such filtration the original signal should be preserved.*

### 1. WSTĘP

Wygładzanie jest jedną z metod cyfrowego przetwarzania sygnałów, polegającą na estymacji wartości sygnałów w ustalonych chwilach na podstawie zarówno poprzednich, jak i następnych obserwacji.

W praktyce jest to zastąpienie wyrazów danego szeregu, mającego przebieg nieregularny, innym o przebiegu gładszym, o którym można przypuszczać, że lepiej reprezentuje istotę zjawiska niż szereg pierwotny. Najczęstszą metodą realizacji problemu wygładzania jest odpowiednia filtracja sygnału cyfrowego, skąd pochodzi również określenie „filtr wygładzający”, stosowane do określenia różnorodnych algorytmów wygładzania.

Model wyrównania wykładniczego stanowi jeden z klasycznych już modeli wygładzania sygnałów opracowany przez R.G.Browna [1]. W modelu wyrównania wykładniczego ocenę sygnału  $y_t$  w czasie  $t$  można przedstawić jako średnią ważoną

---

<sup>1</sup>Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny, Katedra Telekomunikacji i Fotoniki; 71-126 Szczecin; ul. 26 Kwietnia 10. Tel: +48 91 449 51 39, E-mail: jpeksinski@zut.edu.pl,

<sup>2</sup>Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny, Katedra Przetwarzania Sygnałów i Inżynierii Multimedialnej; 71-126 Szczecin; ul. 26 Kwietnia 10. Tel: +48 91 449 53 11, E-mail: grzegorz.mikolajczak@zut.edu.pl

wartości sygnału z okresu poprzedniego  $y_{t-1}$  oraz najnowszej obserwacji  $x_t$ . Wartości ocen sygnału wyznacza się za pomocą następującej relacji:

$$y_t = \alpha \cdot x_t + (1 - \alpha) \cdot y_{t-1} \quad t = 1, \dots, n \quad (1)$$

przy czym  $y_0 = x_0$ , a zatem początkowa ocena sygnału to wartość najwcześniejszej chronologicznie obserwacji  $x_t$ . Parametr  $\alpha \in (0, 1)$  jest nazywany stałą wygładzania.

W zależności od wielkości parametru większe znaczenie mają obserwacje bieżące lub poprzednie. Wartości parametru bliskie jedności oznaczają, że większy udział mają obserwacje najnowsze, natomiast wartości bliskie zera oznaczają, że większą wagę mają obserwacje okresu poprzedniego. Wartość parametru  $\alpha$  ustala się zwykle metodą doświadczalną. Za najlepszą uznaje się tę wartość, dla której otrzymuje się największą zgodność obserwacji empirycznych szeregu z wartościami teoretycznymi modelu [2]. W publikacji [3] pokazano, że redukcja wariancji szumu dla wygładzania wykładniczego, dla zakłócenia losowego  $\{z_k\}$ , o wartości przeciętnej zero  $E(z) = 0$  i wariancji  $V(z) = \sigma^2$ , wyraża się wzorem:

$$\sigma_w^2 = \sigma^2 \cdot \frac{\alpha}{2 - \alpha} \quad (2)$$

gdzie:  $\sigma^2$  – wariancja szumu wejściowego,  
 $\sigma_w^2$  – wariancja szumu po wygładzaniu.;

Z równania (2) wynika, że w wyniku wygładzania wykładniczego następuje redukcja wariancji szumu, której wielkość zależna jest od stałej wygładzania. Im mniejsze staje się  $\alpha$ , tym większa jest osiągnięta redukcja szumu. Jednakowoż, im mniejsza jest wartość  $\alpha$ , tym wolniej system wygładzający odpowiada na zmiany w sygnale wejściowym.

Wygładzanie wykładnicze można interpretować jako jednoogniowy filtr cyfrowy o nieskończonej odpowiedzi impulsowej NOI. Równanie różnicowe opisujące tego typu filtry można zapisać w postaci:

$$y_n = \sum_{k=1}^K a_k y_{n-k} + \sum_{m=0}^M b_m x_{n-m} \quad (3)$$

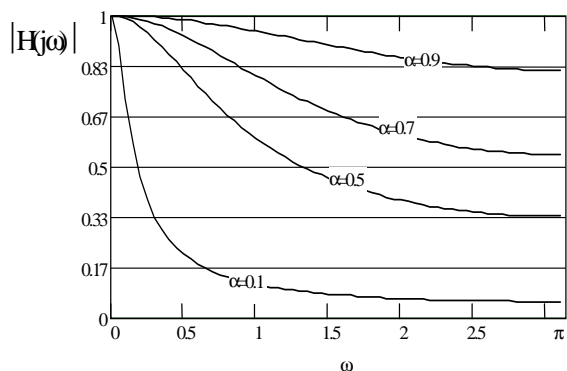
Stąd algorytmy wygładzania noszą nazwę cyfrowych filtrów wygładzających. Możemy zatem określić charakterystykę częstotliwościową takiego filtru [5], którą wyznaczymy z zależności:

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cos(m\omega) - j \sum_{m=0}^M b_m \sin(m\omega)}{1 - \sum_{k=1}^K a_k \cos(k\omega) + j \sum_{k=1}^K a_k \sin(k\omega)} \quad (4)$$

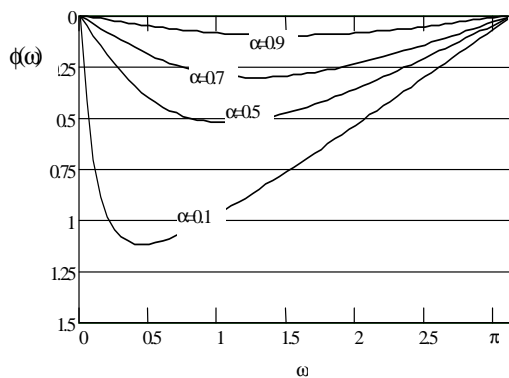
Dla filtru jednoogniowego NOI, współczynniki zależności (1) przyjmują odpowiednio wartości:  $M=0$ ,  $K=1$ ,  $b_0 = \alpha$  i  $a_1 = (1 - \alpha)$ , podstawiając je do (4) otrzymujemy charakterystykę częstotliwościową wygładzania wykładniczego :

$$H(j\omega) = \frac{a}{1 - (1-a)\cos(\omega) + j(1-a)\sin(\omega)} \quad (5)$$

Na podstawie powyższej zależności (5) możemy wykreślić charakterystyki amplitudowe i fazowe, dla różnych wartości parametru wygładzania  $\alpha$ , w unormowanym zakresie pulsacji  $0 \leq \omega \leq \pi$ . Jak widać na wykresie charakterystyki amplitudowej (rys.1) w miarę zmniejszania wartości  $\alpha$ , filtr wygładzania wykładniczego zachowuje się jak filtr dolnoprzepustowy. Na rys.2 przedstawiono charakterystykę fazową tego filtra.



Rys.1. Charakterystyka amplitudowa filtra wygładzającego (1).



Rys.1. Charakterystyka fazowa filtra wygładzającego (1).

## 2. ZMODYFIKOWANY ALGORYTM WYGŁADZANIA WYKŁADNICZEGO

Mając dany ciąg próbek sygnału  $\{x_k\}$  obarczonych addytywnym zakłóceniem losowym  $\{z_k\}$ , o wartości przeciętnej zero  $E(z)=0$  i wariancji  $V(z)=\sigma^2$ , chcemy zastąpić nowym ciągiem  $\{y_k\}$  tak by zminimalizować wariancję szumu, jednocześnie zachowując pierwotny sygnał. W tym celu tworzymy funkcjonal (6), przypominający zależność (1), w którym pierwszy składnik odpowiada za zgodność z sygnałem a drugi za minimalizację wariancji ciągu próbek wyjściowych.

$$H = \alpha \sum_{k=1}^N (y_k - x_k)^2 + (1 - \alpha) \sum_{k=1}^N (y_k - \tilde{y})^2 \quad (6)$$

Gdzie:  $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$ ,  $\tilde{y}$  - wartość średnia  $\{y_k\}$ .

W przypadku zakłócenia losowego  $\{z_k\}$  o  $E(z)=0$

$$\tilde{y} = \tilde{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

czyli

$$H = \alpha \sum_{k=1}^N (y_k - x_k)^2 + (1 - \alpha) \sum_{k=1}^N (y_k - \tilde{x})^2 \quad (7)$$

Minimalizując funkcjonal (7) względem  $y_k$ , otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$y_k = \alpha \cdot x_k + (1 - \alpha) \cdot \tilde{x} \quad (8)$$

gdzie:  $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$ ,  $\tilde{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$

W przypadku gdy  $\alpha=0$  to otrzymamy:  $y_k = \tilde{x}$  - co odpowiada minimalnej wariancji szumu na wyjściu filtru. Natomiast dla  $\alpha=1$  to - zachodzi maksymalna zgodność ciągu wyjściowego z wejściowym, słuszna dla sygnału nie zaszumionego.

Rozpatrzmy przypadek dla trzech punktów:  $x_{k-1}$ ,  $x_k$ ,  $x_{k+1}$  i stałej wygładzania  $\alpha=0.5$ . Stosując zależność (8), otrzymamy:

$$y_k = \frac{1}{6} (x_{k-1} + 4x_k + x_{k+1}) \quad (9)$$

Jak widać powyższa zależność opisuje ważony filtr średniej ruchomej, dla której wariancję sygnału wyjściowego, niezależnie od przyjętego modelu zakłócenia, można wyznaczyć z zależności [4] :

$$\sigma_w^2 = \sigma^2 \frac{\sum_{L=-p}^p (a_L)^2}{\left(\sum_{L=-p}^p a_L\right)^2} \tag{10}$$

gdzie:  $\sigma^2$  – wariancja szumu wejściowego,  $\sigma_w^2$  - wariancja szumu po wygładzaniu  
 $a_L$  - współczynniki wagowe filtru.

Dla rozpatrywanego przypadku (9), wariancja wyjściowa wynosi:  $\sigma_w^2 = \sigma^2/2$ , czyli jest większa niż w przypadku średniej ruchomej, dla której przyjmuje wartość:  $\sigma_w^2 = \sigma^2/3$ . Można się zatem spodziewać, że tłumienie zakłóceń w przypadku stosowania zależności (8), będzie mniejsze. Wynika to z przyjętego kompromisu dotyczącego tłumienia sygnału przy zachowaniu jak największej zgodności z sygnałem oryginalnym.

### 3. WYNIKI TESTÓW

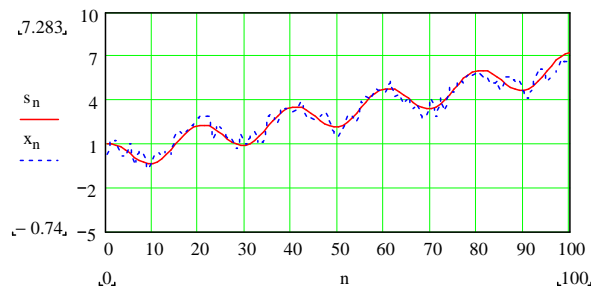
Proponowany algorytm (8) poddano testom, polegającym na wygładzaniu ciągu próbek  $\{x_k\}$  (11), wygenerowanych na podstawie sygnału harmonicznego z trendem  $\{s_k\}$ , zakłóconych szumem  $\{z_k\}$ , o rozkładzie równomiernym, normalnym (Gausa), biekspotentcyjnym (Laplace'a), wartości przeciętnej zero  $E(z)=0$  i wariancji  $V(z)=\sigma^2$ . Parametry rozkładów dobrano tak by zachować zgodność tłumienia wariancji w każdym przypadku, dla filtru średniej ruchomej, co przedstawiono w tabeli 1. Na rysunku 3 przedstawiono analizowany sygnał wraz z zakłóceniem.

$$x_k = s_k + z_k \tag{11}$$

gdzie:  $s_k = \cos(\frac{2\pi}{40} \cdot k) + \frac{2\pi}{100} \cdot k$   $k \in (0;100)$   
 $z_k$ - szum o zadanym rozkładzie.

Tab. 1. Graniczne wartości wariancji na wyjściu filtrów średniej ruchomej, przy różnych modelach zakłócenia oraz przy zachowaniu zgodności tłumienia.

Model zakłócenia	Średnia ruchoma
Rozkład jednostajny: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma\sqrt{3}}, & -\sigma\sqrt{3} \leq x \leq \sigma\sqrt{3} \\ 0 & \end{cases}$	$\frac{\sigma^2}{N}$
Rozkład Gaussa (normalny): $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$	$\frac{\sigma^2}{N}$
Rozkład Laplace'a (biekspontencjalny): $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2} x /\sigma}$	$\frac{\sigma^2}{N}$



Rys.3. Sygnał wejściowy  $\{s_k\}$  wraz z zakłóceniem  $\{z_k\}$  o wartości przeciętnej zero  $E(z)=0$  i wariancji  $\sigma^2=0.25$ .

Tab. 2. Wartości błędu średniokwadratowego MSE poszczególnych metod wygładzania dla różnego poziomu zakłócenia w funkcji parametru wygładzania  $\alpha$ , dla rozkładu równomiernego.

$\alpha$	Wygładzanie wykładnicze (1)			Zmodyfikowane wygładzanie (8) dla 3-pkt.			Zmodyfikowane wygładzanie (8) dla 5-pkt		
	$\sigma^2=0,25$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=4$	$\sigma^2=0,25$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=4$	$\sigma^2=0,25$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=4$
0	13,33	13,54	18,72	0,052	0,272	1,388	0,027	0,142	0,823
0,05	1,494	1,520	1,801	0,051	0,274	1,397	0,027	0,143	0,835
0,1	0,692	0,736	0,906	0,051	0,281	1,418	0,028	0,148	0,863
0,15	0,462	0,531	0,724	0,053	0,290	1,453	0,030	0,157	0,907
0,2	0,338	0,432	0,692	0,055	0,303	1,500	0,033	0,171	0,967
0,25	0,255	0,371	0,724	0,059	0,320	1,560	0,038	0,190	1,043
0,3	0,196	0,335	0,798	0,064	0,340	1,633	0,043	0,213	1,136
0,35	0,155	0,317	0,901	0,069	0,364	1,719	0,050	0,241	1,245
0,4	0,128	0,315	1,027	0,076	0,391	1,818	0,058	0,273	1,370
0,45	0,111	0,325	1,173	0,084	0,422	1,929	0,067	0,310	1,511
0,5	0,102	0,346	1,336	0,093	0,456	2,054	0,078	0,351	1,668
0,55	0,100	0,377	1,516	0,103	0,494	2,191	0,090	0,397	1,842
0,6	0,102	0,415	1,711	0,114	0,535	2,341	0,102	0,447	2,031
0,65	0,108	0,461	1,921	0,126	0,580	2,504	0,116	0,502	2,237
0,7	0,118	0,514	2,149	0,140	0,628	2,681	0,132	0,561	2,459
0,75	0,131	0,574	2,394	0,154	0,680	2,869	0,148	0,625	2,698
0,8	0,147	0,641	2,660	0,169	0,736	3,071	0,166	0,694	2,952
0,85	0,166	0,716	2,947	0,186	0,795	3,286	0,184	0,766	3,223
0,9	0,188	0,799	3,259	0,204	0,857	3,513	0,204	0,844	3,510
0,95	0,213	0,890	3,599	0,222	0,923	3,754	0,226	0,926	3,813
1	0,242	0,991	3,972	0,242	0,992	4,007	0,248	1,012	4,132

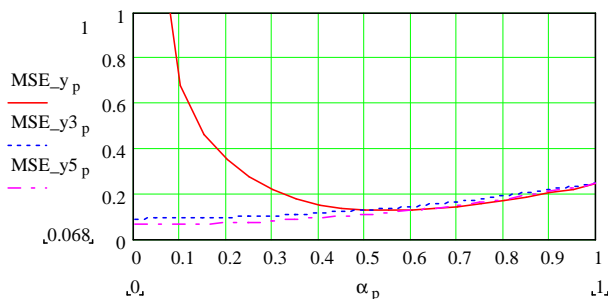
Oceny przedstawionej metody wygładzania, dokonano stosując kryterium błędu średniokwadratowego MSE (*mean square error*) zdefiniowanego wzorem:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (s_k - y_k)^2 \tag{12}$$

gdzie:  $s_k$  - sygnał niezakłócony,  $y_k$  - sygnał po filtracji

Tab. 3. Wartości błędu średniokwadratowego MSE poszczególnych metod wygładzania dla różnego poziomu zakłócenia w funkcji parametru wygładzania  $\alpha$ , dla rozkładu normalnego (Gaussa)

$\alpha$	Wygładzanie wykładnicze (1)			Zmodyfikowane wygładzanie (8) dla 3-pkt.			Zmodyfikowane wygładzanie (8) dla 5-pkt.		
	$\sigma^2=0,25$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=4$	$\sigma^2=0,25$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=4$	$\sigma^2=0,25$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=4$
0	11.406	14.905	23.905	0.088	0.345	1.364	0.097	0.207	0.628
0,05	1.412	1.524	1.952	0.088	0.346	1.371	0.099	0.215	0.657
0,1	0.689	0.746	0.994	0.09	0.351	1.391	0.102	0.226	0.7
0,15	0.48	0.55	0.83	0.091	0.359	1.423	0.106	0.241	0.76
0,2	0.365	0.458	0.81	0.094	0.37	1.469	0.111	0.26	0.834
0,25	0.287	0.404	0.844	0.098	0.384	1.527	0.116	0.283	0.924
0,3	0.231	0.373	0.912	0.102	0.402	1.598	0.123	0.309	1.03
0,35	0.191	0.36	1.006	0.107	0.423	1.682	0.131	0.34	1.15
0,4	0.165	0.362	1.122	0.113	0.447	1.778	0.14	0.374	1.287
0,45	0.148	0.375	1.258	0.119	0.474	1.888	0.149	0.412	1.438
0,5	0.139	0.398	1.412	0.127	0.504	2.01	0.16	0.455	1.605
0,55	0.136	0.429	1.582	0.135	0.538	2.145	0.172	0.501	1.788
0,6	0.137	0.467	1.77	0.144	0.574	2.293	0.184	0.55	1.986
0,65	0.142	0.511	1.974	0.154	0.614	2.453	0.198	0.604	2.199
0,7	0.15	0.562	2.196	0.165	0.658	2.627	0.213	0.662	2.428
0,75	0.161	0.618	2.437	0.176	0.704	2.813	0.228	0.723	2.672
0,8	0.174	0.68	2.698	0.189	0.754	3.012	0.245	0.789	2.931
0,85	0.19	0.749	2.982	0.202	0.806	3.224	0.262	0.858	3.206
0,9	0.207	0.825	3.291	0.216	0.862	3.449	0.281	0.931	3.496
0,95	0.227	0.908	3.629	0.23	0.922	3.686	0.301	1.008	3.802
1	0.25	1.00	4.00	0.246	0.984	3.936	0.321	1.089	4.123



Rys.3. Wykresy błędów średniokwadratowych MSE, dla poszczególnych metod wygładzania z tabeli 2 w funkcji parametru wygładzania  $\alpha$ , dla poziomu zakłócenia  $\sigma^2=0.25$ .  $MSE_y$  – wygl. wykładnicze,  $MSE_{y3}$ - zmodyfikowane wygl. dla 3 pkt. ,  $MSE_{y5}$  - zmodyfikowane wygl. dla 5 pkt.

Tab. 4. Wartości błędów średniokwadratowych MSE poszczególnych metod wygładzania dla różnego poziomu zakłócenia w funkcji parametru wygładzania  $\alpha$ , dla rozkładu biekspotencjalnego (Laplace'a)

$\alpha$	Wygładzanie wykładnicze (1)			Zmodyfikowane wygładzanie (8) dla 3-punktów			Zmodyfikowane wygładzanie (8) dla 5-punktów		
	$\sigma^2=0,25$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=4$	$\sigma^2=0,25$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=4$	$\sigma^2=0,25$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=4$
0	8.795	7.225	19.694	0.08	0.295	1.464	0.084	0.24	0.936
0,05	1.376	1.396	1.805	0.081	0.294	1.473	0.085	0.244	0.944
0,1	0.705	0.748	1.028	0.083	0.297	1.494	0.087	0.252	0.965
0,15	0.504	0.56	0.959	0.086	0.304	1.527	0.09	0.264	1.00
0,2	0.393	0.469	1.001	0.089	0.313	1.573	0.093	0.281	1.049
0,25	0.316	0.416	1.081	0.093	0.327	1.631	0.098	0.301	1.112
0,3	0.259	0.386	1.181	0.098	0.344	1.702	0.104	0.326	1.189
0,35	0.219	0.374	1.298	0.104	0.364	1.785	0.111	0.355	1.279
0,4	0.191	0.375	1.428	0.11	0.388	1.88	0.119	0.387	1.384
0,45	0.173	0.387	1.568	0.118	0.416	1.988	0.128	0.424	1.502
0,5	0.161	0.409	1.719	0.126	0.447	2.108	0.138	0.465	1.634
0,55	0.156	0.438	1.879	0.135	0.482	2.241	0.149	0.51	1.779
0,6	0.155	0.474	2.05	0.144	0.52	2.386	0.161	0.559	1.939
0,65	0.158	0.517	2.232	0.155	0.562	2.544	0.174	0.612	2.112
0,7	0.164	0.566	2.427	0.166	0.607	2.714	0.188	0.669	2.299
0,75	0.172	0.621	2.637	0.178	0.656	2.896	0.203	0.731	2.500
0,8	0.183	0.682	2.863	0.191	0.709	3.091	0.22	0.796	2.715
0,85	0.196	0.75	3.109	0.205	0.765	3.298	0.237	0.865	2.943
0,9	0.212	0.825	3.378	0.219	0.824	3.518	0.255	0.939	3.185
0,95	0.230	0.908	3.673	0.235	0.887	3.75	0.274	1.017	3.442
1	0.250	1.00	4.00	0.251	0.954	3.994	0.295	1.098	3.712



#### 4. WNIOSKI

Wyniki poszczególnych testów zebrano w tabelach 2-4. Analizując wyniki poszczególnych prób można stwierdzić, że proponowana metoda daje mniejszy błąd średniokwadratowy dla zakłócenia o wariancji  $\sigma^2=0.25$  i 1, natomiast dla wartości 4, nie zaobserwowano większej poprawy procesie wygładzania zmodyfikowanym algorytmem. Wynika to z faktu, że w proponowanym algorytmie, zachodzi kompromis między zmniejszaniem wariancji zakłócenia, a wiernym odwzorowaniem sygnału niezakłóconego.

#### 5. BIBLIOGRAFIA

- [1] R.G. Brown *Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series*. Engelwood Cliffs, New York 1963.
- [2] E.S. Gardner *Exponential smoothing the state of art*. Journal of Forecasting nr 4 1-28 1985.
- [3] R.A. Witte *Averaging Techniques Reduce Test Noise. Improve Accuracy*. Microwaves&RF, Feb. 1988.
- [4] J. Purczyński, J. Ayman *Porównanie właściwości filtru medianowego i filtru średniej ruchomej*. Mat. Konf. ZKwE'2000 s.353-356 Poznań 2000.
- [5] R.G. Lyos *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. WKŁ Warszawa 1999.