TRANSCOMP – XIV INTERNATIONAL CONFERENCE
COMPUTER SYSTEMS AIDED SCIENCE, INDUSTRY AND TRANSPORT

Iloczyn zbiorów rozmytych,
Operatory T-normy,
Funkcje przynależności

Krzysztof OLESIAK [1]

WYZNACZANIE ILOCZYNU ZBIORÓW ROZMYTYCH Z WYKORZYSTANIEM NIENASTAWIALNYCH OPERATORÓW T-NORMY

W referacie przedstawiono nienastawialne operatory T-normy. Są one specjalnym typem funkcji używanym w logice wielowartościowej, a dokładnie w logice rozmytej. T-normy są uogólnieniem zwykłego logicznego operatora iloczynu znanego z logiki Boole'a. Dla wejściowych funkcji sigmoidalnych wyznaczono rozmyte funkcje przynależności nienastawialnych operatorów T-normy. Rezultaty obliczeń zaprezentowano w postaci graficznej.

DETERMINING THE PRODUCT OF FUZZY SETS USING NON-ADJUSTABLE T-NORM OPERATORS

The paper presents non-adjustable T-norm operators. These operators are a special kind of function used in multi-valued logic, exactly in fuzzy logic. T-norms are a generalization of the usual logical product operator known in Boolean logic. Fuzzy membership functions of non-adjustable T-norm operators were calculated for the input sigmoidal functions. The results of calculations were presented in the graphic form.

1. WSTĘP

W klasycznej teorii zbiorów operacja iloczynu jest stosunkowo prostym i jednoznacznie zdefiniowanym działaniem matematycznym. Jednak w przypadku zbiorów rozmytych zagadnienie to ma charakter bardziej złożony. Uwarunkowane jest to tym, iż zbiory rozmyte składają się z elementów, które należą do nich w pełni lub tylko częściowo.

Iloczyn zbiorów rozmytych A i B określonych w pewnej przestrzeni rozważań X można zdefiniować wykorzystując operator minimum w odniesieniu do funkcji przynależności, które opisują zbiory wejściowe. Zastosowanie operatora minimum powoduje, że wartość funkcji przynależności iloczynu zbiorów rozmytych zależy wyłącznie od wartości mniejszej, w danym przedziale, funkcji wejściowej. Natomiast wartość większej, oczywiście w danym przedziale, funkcji przynależności nie wpływa na wynik końcowy, co stanowi pewną wadę operatora minimum. Dlatego też powstało wiele innych definicji iloczynu zbiorów rozmytych. Wprowadzono również pojęcie T-normy, czyli klasy funkcji

[1] Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, 42-200 Częstochowa, ul. Armii Krajowej 17,
tel.: + 48 34 32 50 884, fax: + 48 34 32 50 821, e-mail: kolesiak@el.pcz.czest.pl

odwzorowujących operację iloczynu. Operator T możemy nazywać operatorem T-normy, jeżeli spełnia następujące warunki: tożsamość przestrzeni odwzorowań, przemienność, łączność, monotoniczność i tożsamość jedynki.

Do nienastawialnych operatorów T-normy, oprócz wspomnianego już wcześniej operatora minimum, możemy zaliczyć następujące iloczyny: algebraiczny, drastyczny (nazywany także ostrym), Łukasiewicza, Einsteina oraz Hamachera. W przypadku tych operatorów algorytm działania jest stały, parametry dodatkowe zwane też stopniami swobody operatora nie występują, a wynik końcowy zależy wyłącznie od parametrów wejściowych zbiorów rozmytych [2, 5, 6, 8, 11].

2. PODSTAWOWE POJĘCIA TEORII ZBIORÓW ROZMYTYCH

Teoria zbiorów rozmytych pozwala na matematyczny opis oceny jakościowej określonych wielkości fizycznych. W konsekwencji umożliwia to przetworzenie subiektywnej informacji i udoskonalenie tradycyjnych metod modelowania i sterowania różnorodnych układów [7, 12]. Podstawowym pojęciem tej teorii jest zbiór rozmyty (ang. fuzzy set), który w przypadku ogólnym może mieć charakter ciągły lub dyskretny.

Zbiorem rozmytym A, określonym w pewnej przestrzeni rozważań X, nazywamy zbiór wszystkich par $(\mu_A(x), x)$, które utworzono dla każdego elementu x należącego do przestrzeni X [1, 2, 5, 10], czyli:

$$\forall x \in X: \quad A = \{(\mu_A(x), x)\} \tag{1}$$

gdzie: μ_A – funkcja przynależności zbioru rozmytego A
$\mu_A(x)$ – stopień przynależności elementu x do zbioru A

Funkcja przynależności przyporządkowuje każdemu elementowi x pewną wartość liczbową, która należy do przedziału obustronnie domkniętego $\langle 0, 1\rangle$. Wartość ta nazywana jest stopniem przynależności i może być wyrażona w postaci: formuły matematycznej, tabeli lub też wykresu zarówno o charakterze ciągłym, jak również dyskretnym. Parę $(\mu_A(x), x)$ nazywa się singletonem rozmytym i oznacza jako $\mu_A(x)/x$. Wówczas postać ogólną ciągłego zbioru rozmytego można zapisać w następujący sposób [2, 6, 11]:

$$\forall x \in X: \quad A = \int_X \mu_A(x)/x \tag{2}$$

Powyższa formuła oznacza, że zbiór rozmyty A jest całką mnogościową par $(\mu_A(x), x)$. W przypadku dyskretnego zbioru rozmytego stosuje się natomiast następującą zależność [2, 6, 11]:

$$\forall x \in X: \quad A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n \tag{3}$$

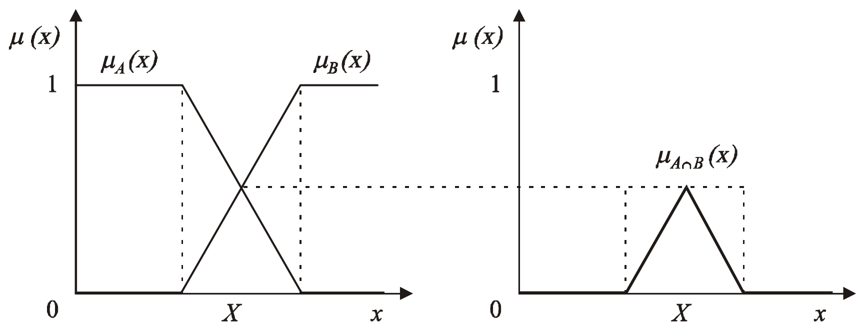
Przedstawiona formuła wskazuje, że dla przypadku dyskretnego zbiór rozmyty A jest sumą mnogościową wszystkich par (μ_A(x), x) przestrzeni rozważań X. Z zaprezentowanych zależności (1-3) wyraźnie wynika, że wyznaczenie iloczynu zbiorów rozmytych w przypadku ogólnym jest zagadnieniem złożonym.

3. OPERATORY ILOCZYNU ZBIORÓW ROZMYTYCH

Iloczyn dwóch zbiorów rozmytych A i B określonych w przestrzeni rozważań X definiujemy przy pomocy następującej zależności [2, 4, 5, 9]:

$$\forall x \in X : \ \mu_{A \cap B}(x) = min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) \tag{4}$$

Z przedstawionej definicji iloczynu zbiorów rozmytych wynika, iż wartość funkcji przynależności $\mu_{A\cap B}$(x) zależy wyłącznie od wartości mniejszej, w danym przedziale *x*, funkcji składowej μ_A(x) lub μ_B(x). Natomiast wartość większej, oczywiście w danym przedziale *x*, funkcji przynależności nie wpływa na wynik końcowy. Można to przedstawić przy pomocy ilustracji graficznej, którą zaprezentowano na rys. 1.



Rys. 1. Przykładowe wykresy funkcji przynależności zbiorów rozmytych A i B oraz iloczynu zbiorów A∩B

Przedstawiona definicja iloczynu zbiorów rozmytych jest jedną z wielu możliwych. Dlatego też w literaturze [2, 3, 6, 8] wprowadzono pojęcie T-normy, czyli klasy funkcji odwzorowujących operację iloczynu. Operator T nazywamy operatorem T-normy, jeżeli spełnia następujące warunki:

a) tożsamość przestrzeni odwzorowań

$$\mathrm{T} : [0,1]\,\mathrm{x}\,[0,1] \rightarrow [0,1] \tag{5}$$

b) przemienność

$$\mathrm{T}\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) = \mathrm{T}\left(\mu_B(x), \mu_A(x)\right) \tag{6}$$

c) łączność

$$T(\mu_A(x), T(\mu_B(x), \mu_C(x))) = T(T(\mu_A(x), \mu_B(x)), \mu_C(x)) \tag{7}$$

d) monotoniczność

$$\mu_A(x) \geq \mu_C(x) \ \wedge \ \mu_B(x) \geq \mu_D(x) \Rightarrow T(\mu_A(x), \mu_B(x)) \geq T(\mu_C(x), \mu_D(x)) \tag{8}$$

e) tożsamość jedynki

$$T(\mu_A(x), 1) = \mu_A(x) \tag{9}$$

Do podstawowych nienastawialnych operatorów T-normy, oprócz zdefiniowanego już wcześniej za pomocą zależności (4) operatora minimum, można zaliczyć [2, 5, 6, 8, 11]:

1) Iloczyn algebraiczny

$$\forall x \in X: \ \mu_{A \cap B}(x) = \mathrm{prod}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \tag{10}$$

2) Iloczyn drastyczny

$$\forall x \in X: \ \mu_{A \cap B}(x) = \mathrm{prod}_{\mathrm{dras}}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \begin{cases} \mu_A(x) \ \text{ dla } \mu_B(x) = 1 \\ \mu_B(x) \ \text{ dla } \mu_A(x) = 1 \\ 0 \ \text{ w innych przypadkach} \end{cases} \tag{11}$$

3) Iloczyn Łukasiewicza

$$\forall x \in X: \ \mu_{A \cap B}(x) = \mathrm{prod}_{\text{Łuk}}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1) \tag{12}$$

4) Iloczyn Einsteina

$$\forall x \in X: \mu_{A \cap B}(x) = \mathrm{prod}_{\mathrm{Ein}}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \frac{\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}{2 - (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x))} \tag{13}$$

5) Iloczyn Hamachera

$$\forall x \in X: \mu_{A \cap B}(x) = \mathrm{prod}_{\mathrm{Ham}}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \frac{\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}{\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)} \tag{14}$$

Przedstawione zależności określają wyznaczanie iloczynu w odniesieniu do dwóch zbiorów rozmytych. W przypadku większej ilości zbiorów wejściowych iloczyn obliczamy stopniowo, zawsze w odniesieniu do pary zbiorów. Kolejność wyznaczania iloczynów składowych nie ma znaczenia, ponieważ wszystkie prezentowane T-normy spełniają warunek przemienności i łączności.

4. WYZNACZANIE FUNKCJI PRZYNALEŻNOŚCI OPERATORÓW T-NORMY

W celu porównania rezultatów uzyskiwanych przy zastosowaniu różnych operatorów T-normy zrealizowano, przy wykorzystaniu pakietu Matlab, odpowiednie skrypty prezentujące działanie wybranych operatorów. Wejściowe zbiory rozmyte zostały opisane za pomocą sigmoidalnej funkcji przynależności, której postać ogólną można przedstawić stosując następującą formułę [6, 11]:

$$\mu(x) = \frac{1}{1+e^{-a(x-b)}} \tag{15}$$

gdzie: a – współczynnik nachylenia funkcji w punkcie przegięcia
b – współrzędna punktu, dla którego stopień przynależności funkcji wynosi 0.5

Do obliczeń zastosowano trzy sigmoidalne funkcje przynależności, które można opisać za pomocą następujących zależności:

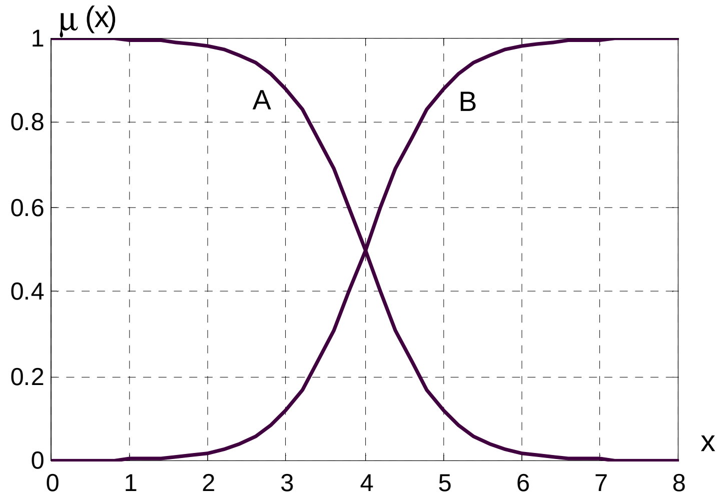
$$\mu_A(x) = 1 - \frac{1}{1+e^{-2(x-4)}} \tag{16}$$

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1+e^{-2(x-4)}} \tag{17}$$

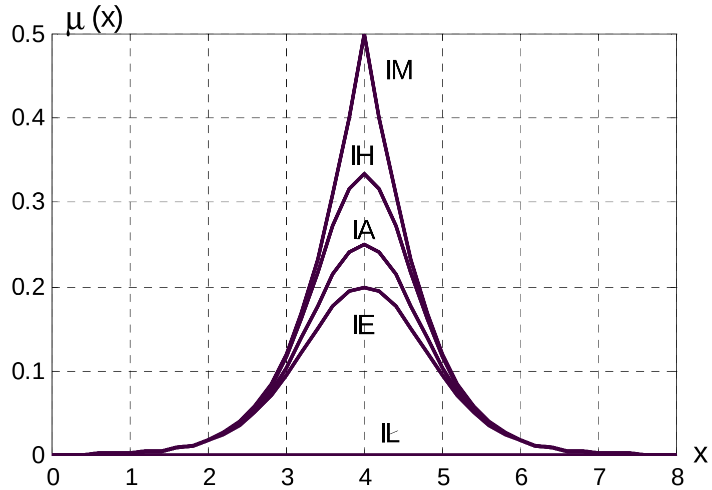
$$\mu_C(x) = \frac{1}{1+e^{-1(x-4)}} \tag{18}$$

Obliczenia przeprowadzono dla symetrycznych osiowo funkcji przynależności A i B oraz dla niesymetrycznych osiowo funkcji A i C. Dla każdej pary funkcji wyznaczono po pięć operatorów T-normy. Nie obliczano iloczynu drastycznego, ponieważ zależność matematyczna, która go opisuje nie ma praktycznego zastosowania w odniesieniu do funkcji o charakterze asymptotycznym i jednocześnie nieskończenie wielkim nośniku.

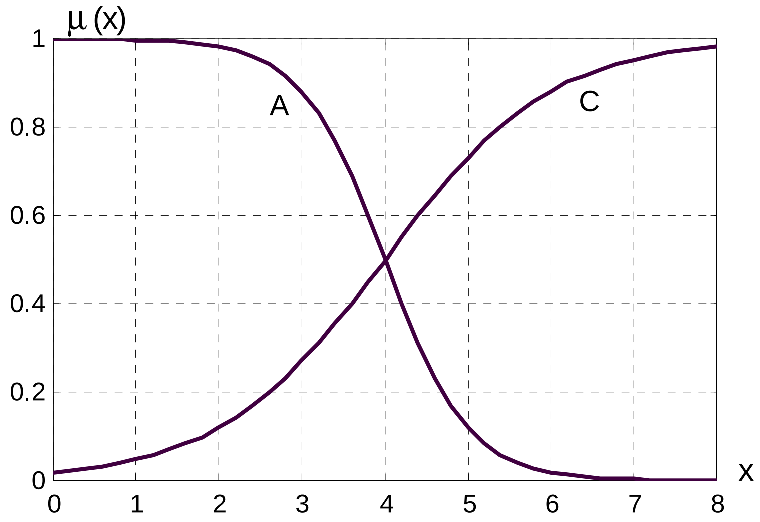
Wykresy funkcji przynależności dla wejściowych zbiorów rozmytych zaprezentowano na rys. 2 i 4. Natomiast wyznaczone funkcje przynależności z wykorzystaniem wybranych operatorów T-normy zostały przedstawione na rys. 3 i 5.



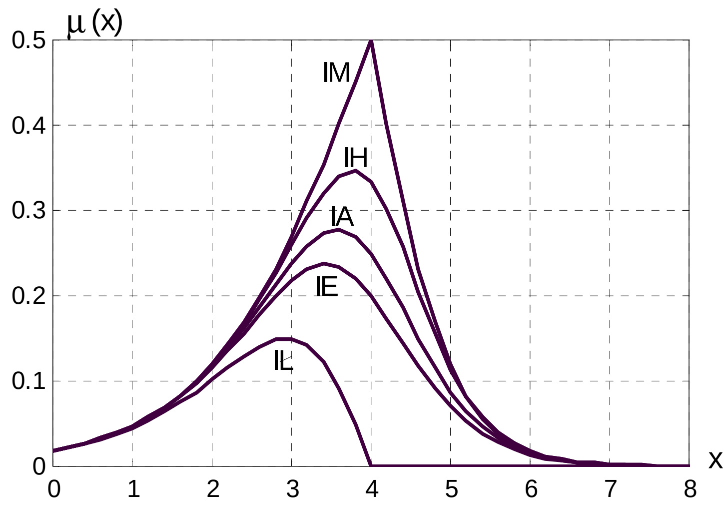
Rys. 2. Wykresy funkcji przynależności $\mu(x)$ zbiorów rozmytych: A - funkcja lewa sigmoidalna, B - funkcja prawa sigmoidalna



Rys. 3. Wykresy rozmytych funkcji przynależności $\mu(x)$ wyznaczone dla następujących operatorów T-normy: IM – iloczyn minimum, IH- iloczyn Hamachera, IA - iloczyn algebraiczny, IE - iloczyn Einsteina, IŁ - iloczyn Łukasiewicza



Rys. 4. Wykresy funkcji przynależności $\mu(x)$ zbiorów rozmytych: A - funkcja lewa sigmoidalna, C - funkcja prawa sigmoidalna



Rys. 5. Wykresy rozmytych funkcji przynależności $\mu(x)$ wyznaczone dla następujących operatorów T-normy: IM – iloczyn minimum, IH- iloczyn Hamachera, IA - iloczyn algebraiczny, IE - iloczyn Einsteina, IŁ - iloczyn Łukasiewicza

5. WNIOSKI

Wykresy rozmytych funkcji przynależności wyznaczone dla poszczególnych operatorów T-normy pokazują, iż największą wartość otrzymuje się w przypadku iloczynu minimum, który z tego względu uznawany jest za najbardziej optymistyczny operator. Następne w kolejności są iloczyny: Hamachera, algebraiczny, Einsteina i Łukasiewicza. W odniesieniu do symetrycznych osiowo funkcji przynależności uzasadnione jest stosowanie dowolnego operatora T-normy z wyjątkiem iloczynu Łukasiewicza, ponieważ w tym przypadku otrzymuje się funkcję przynależności opisującą zbiór rozmyty pusty. Natomiast celowe jest stosowanie iloczynu Łukasiewicza w sytuacji, gdy wejściowe funkcje przynależności są niesymetryczne osiowo. W przypadku funkcji o przebiegu asymptotycznym i jednocześnie nieskończenie wielkim nośniku nie wyznacza się iloczynu drastycznego, który z tego względu też ma ograniczone zastosowanie.

Podsumowując można stwierdzić, że każdy z przedstawionych operatorów T-normy ma określone cechy charakterystyczne i to w konsekwencji warunkuje obszar zastosowań, który wynika bezpośrednio z rodzaju wejściowych funkcji przynależności oraz ich parametrów.

6. BIBLIOGRAFIA

[1] Dombi J.: *A general class of fuzzy operators, the de Morgan class of fuzzy operators, and fuzziness measures induced by fuzzy operators*, Fuzzy Sets and Systems 8, 1982, pp. 149-163.

[2] Driankov D., Hellendoorn H., Reinfrank M.: *Wprowadzenie do sterowania rozmytego*, Warszawa, WNT 1996.

[3] Dubois D., Prade H.: *A class of fuzzy measures based on triangular norms*, International Journal of General Systems 8, 1982, pp. 43-61.

[4] Dubois D., Prade H.: *A review of fuzzy sets aggregation connectives*, Information Sciences 36, 1985, pp. 85-121.

[5] Kacprzyk J.: *Wieloetapowe sterowanie rozmyte*, Warszawa, WNT 2001.

[6] Piegat A.: *Modelowanie i sterowanie rozmyte*, Warszawa, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT 1999.

[7] Siler W., Ying H.: *Fuzzy Control Theory: The Linear Case*, Fuzzy Sets and Systems 33, 1988, pp. 275-290.

[8] Weber S.: *A general concept of fuzzy connectives, negation and implication based on t-norms and t-conorms*, Fuzzy Sets and Systems 11, 1983, pp. 115-134.

[9] Yager R. R.: *On a general class of fuzzy connectives*, Fuzzy Sets and Systems 4, 1980, pp. 235-242.

[10] Yager R. R.: *A new methodology for ordinal multiple aspect decisions based on fuzzy sets*, Decision Sciences 12, 1981, pp. 589-600.

[11] Yager R. R., Filev D. P.: *Podstawy modelowania i sterowania rozmytego*, Warszawa, WNT 1995.

[12] Ying H., Siler W., Buckley J. J.: *Fuzzy Control Theory: A Nonlinear Case*, Automatica, Vol. 26, No. 3, 1990, pp. 513-520.