

Mirosław LUFT¹
Radosław CIOĆ²
Daniel PIETRUSZCZAK³

PORÓWNANIE KLASYCZNEGO I RÓŻNICZKOWO-CĄŁKOWEGO MODELU PRZETWORNIKA POMIAROWEGO

Artykuł jest odpowiedzią na konieczność stosowania rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów w różnych dziedzinach nauki takich jak teoria sterowania czy miernictwo dynamiczne. W pracy zaprezentowano przetwornik pomiarowy, który zamodelowano zarówno równaniem różniczkowym 2-go rzędu jak i rachunkiem różniczkowo-całkowym ułamkowych rzędów. Stosując różniczkowo-całkową metodę do tworzenia modelu przetwornika pomiarowego otrzymuje się model o idealnym, w przypadku odtwarzania amplitudy, przetwarzaniu sygnału wejściowego. Badania symulacyjne wykonano w środowisku programistycznym MATLAB-SIMULINK.

COMPARISON OF MEASUREMENT TRANSDUCERS MODELLED BY MEANS OF CLASSICAL INTEGRAL-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION AND FRACTIONAL CALCULUS

The article is inspired by developments in the fractional calculus in different areas of science such as control theory and electrical measurements. A model of measurement transducer is presented, modelled by means of both the classical 2nd order differential equation and fractional calculus. Tests are executed in the programming environment MATLAB-SIMULINK.

1. WSTĘP

Dynamiczny rozwój badań w ostatnich latach nad zastosowaniem rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów (krócej: różniczkowo-całkowego) do analizy układów dynamicznych, skłania do podjęcia próby jego użycia w modelowaniu przetworników pomiarowych [7, 10, 11].

¹ Kazimierz Pułaski Technical University of Radom, Faculty of Transport and Electrical Engineering, Poland, 26-600 Radom, Malczewskiego 29, m.luft@pr.radom.pl

² Kazimierz Pułaski Technical University of Radom, Faculty of Transport and Electrical Engineering, Poland, 26-600 Radom, Malczewskiego 29, r.cioc@pr.radom.pl

³ Kazimierz Pułaski Technical University of Radom, Faculty of Transport and Electrical Engineering, Poland, 26-600 Radom, Malczewskiego 29, d.pietruszczak@pr.radom.pl

Dynamikę procesów fizycznych takich jak przyspieszenie, przemieszczenie, przepływ cieczy, natężenie prądu elektrycznego modeluje się równaniami różniczkowymi. Klasyczny zapis dynamiki przetworników pomiarowych opiera się na równaniach różniczkowych, które stanowią ich matematyczny model w dziedzinie czasu. Równanie takie ma postać:

$$\begin{aligned} A_i \frac{d^{(i)}y}{dt^{(i)}} + A_{m-1} \frac{d^{(i-1)}y}{dt^{(i-1)}} + \dots + A_0 y(t) = \\ = B_j \frac{d^{(j)}f(x)}{dt^{(j-1)}} + B_{m-1} \frac{d^{(j-1)}f(x)}{dt^{(j-1)}} + \dots + B_0 f(x) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: $y = f(x)$.

W przypadku rachunku różniczkowo-całkowego operatory różniczkowania i całkowania funkcji łączy się w jeden operator D^n [11].

Dla różniczkowania, rząd n przyjmuje wartości dodatnie $n = 1, 2, 3, \dots$ a dla całkowania wartości ujemne $-n = -1, -2, -3, \dots$. Definiowany jest też operator neutralny dla rzędu $n = 0$:

$$D^n f(t) = \begin{cases} \frac{d^n f(t)}{dt^n} & \text{dla } n > 0 \\ f(t) & \text{dla } n = 0 \\ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \dots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} f(\tau_{-n}) d\tau_{-n} \dots d\tau_2 \Big] d\tau_1 & \text{dla } n < 0 \end{cases} \quad (2)$$

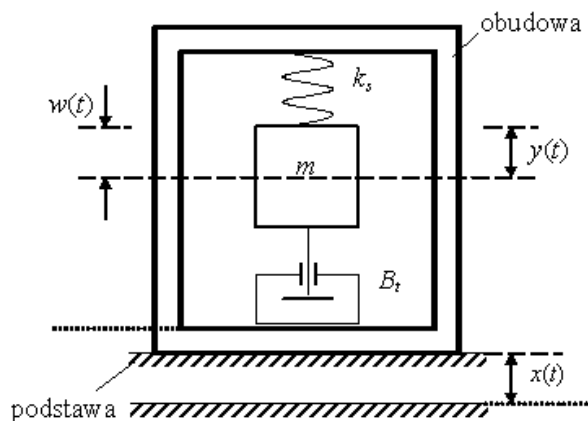
2. MODEL PRZETWORNIKA POMIAROWEGO Z MASĄ SEJSMICZNĄ

W klasycznym zapisie dynamikę przetwornika pomiarowego o budowie pokazanej na rysunku 1 zapisuje się w postaci równania różniczkowego 2-go rzędu [1, 2, 5]:

$$\ddot{w}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{w}(t) + \omega_0^2 w(t) = -\ddot{x}(t) \quad (3)$$

gdzie: ω_0 – pulsacja naturalna, ζ – tłumienie.

Przetworniki z masą sejsmiczną, w zależności od sposobu ich realizacji (doboru parametrów charakteryzujących ich własności dynamiczne), mogą służyć do pomiarów przemieszczenia, prędkości lub przyspieszenia. Wielkością wejściową w tych przetwornikach jest przemieszczenie $x(t)$.



Rys.1. Model przetwornika pomiarowego z masą sejsmiczną: m – masa sejsmiczna przetwornika, k_s – stała sprężyny, B – współczynnik tłumienia lepkiego przetwornika, $x(t)$ – przemieszczenie podstawy i obudowy, $y(t)$ – przemieszczenie masy sejsmicznej m względem nieruchomego układu współrzędnych, $w(t)$ – przemieszczenie masy sejsmicznej m względem obudowy.

Równanie (3) można zapisać w formie równania różnicowego:

$$\begin{aligned} a_2 w_k + a_1 w_{k-1} + a_0 w_{k-2} &= \\ &= b_2 x_k + b_1 x_{k-1} + a_0 x_{k-2} \end{aligned} \tag{4}$$

lub jako równanie macierzowe:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ w_{k-1} \\ w_{k-2} \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

Równanie różnicowe (4) w zapisie pochodno-całkowym ma postać:

$$\begin{aligned} A_2 \Delta_k^{(2)} w_k + A_1 \Delta_{k-1}^{(1)} + A_0 w_{k-2} &= \\ &= B_2 \Delta_k^{(2)} w_k + B_1 \Delta_k^{(1)} x_{k-1} + B_0 w_{k-2} \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie $\Delta_k^{(n)}$ jest różnicą wsteczną funkcji dyskretnej [7], definiowaną jako:

$$\Delta_k^{(n)} f_{(k)} = \sum_{j=0}^k a_j^{(n)} f_{(k-j)} \quad (7)$$

Po uwzględnieniu wyrażenia (7) równanie (6) w zapisie jako równanie macierzowe przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_2 & -a_1 - 2a_0 & a_2 + a_1 + a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_k^{(2)} w_k \\ \Delta_k^{(1)} w_k \\ \Delta_k^{(0)} w_k \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} b_0 & -b_1 - 2b_0 & b_2 + b_1 + b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_k^{(2)} x_k \\ \Delta_k^{(1)} x_k \\ \Delta_k^{(0)} x_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

3. PORÓWNANIE MODELI PRZETWORNIKA POMIAROWEGO

Porównano odpowiedzi przetwornika pomiarowego na wejściowy sygnał sinusoidalny. Opisano go trzema modelami:

- 1) Modelem ciągłym zapisanym transmitancją operatorową:

$$G(s) = \frac{-s^2}{s^2 + 51s + 255} \quad (9)$$

- 2) Modelem dyskretnym otrzymanym z modelu ciągłego opisanego transmitancją dyskretną:

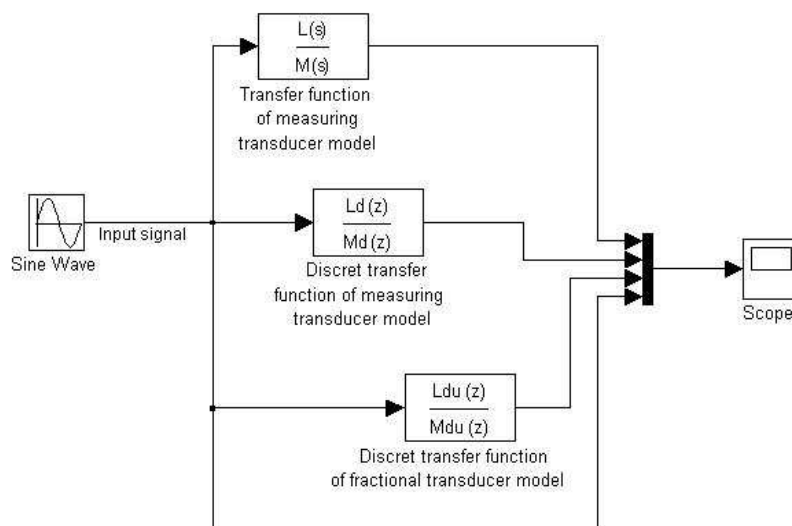
$$G(z) = \frac{-z^2 + 2z - 1}{z^2 - 1,975z + 0,9748} \quad (10)$$

- 3) Modelem dyskretnym wyznaczonym zapisem różniczkowo-całkowym z równania (8) i transmitancji (10):

$$G(z) = \frac{-z^2 + 0,02524z - 6,294e^{-0,005}}{z^2 - 3,161e^{-0,005}z + 1,11e^{-0,016}} \quad (11)$$

Badania odpowiedzi modeli wykonano w środowisku programowania MATLAB [12]. Niezastąpionym tutaj narzędziem pracy był interaktywny pakiet SIMULINK – zbudowany na bazie MATLAB-a, który daje możliwość analizy i syntezy ciągłych i dyskretnych układów dynamicznych. SIMULINK jest środowiskiem graficznym, w którym symulację systemów dynamicznych wykonuje się w oparciu o schemat blokowy budowany z wykorzystaniem bloków bibliecznych.

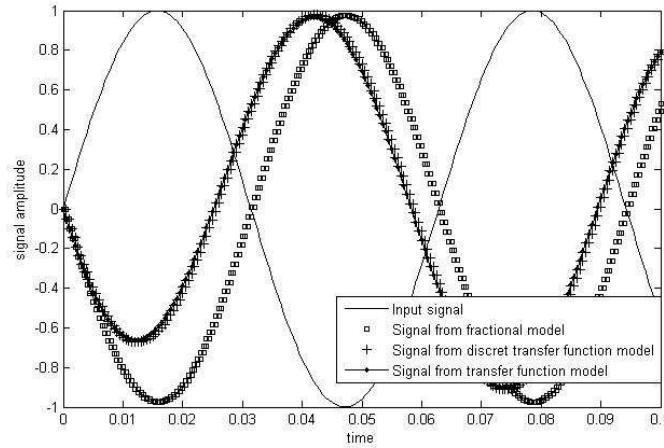
Na rysunku 2 pokazano schemat blokowy układu pomiarowego.



Rys.2. Schemat blokowy układu pomiarowego. [9,13]

Model dyskretny (10) otrzymano dyskretyzując model ciągły (9) metodą „zero-order hold” z czasem próbkowania: $T_p = 0,0005s$.

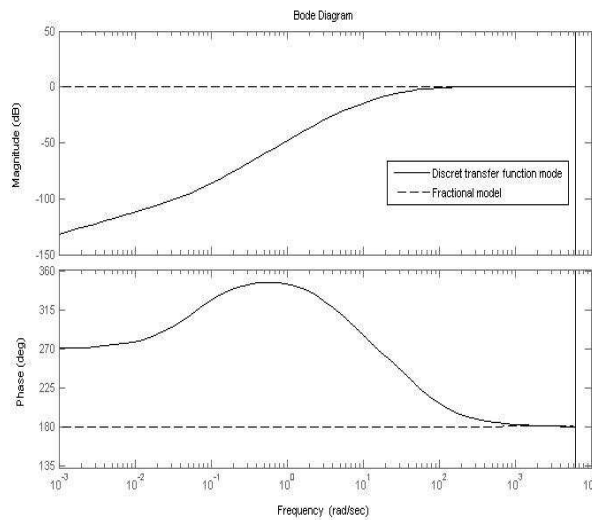
Odpowiedzi wszystkich modeli na sinusoidalny sygnał wejściowy o częstotliwości 100 rad/s przedstawiono na rysunku 3.



Rys.3. Porównanie odpowiedzi modeli przetwornika pomiarowego.

Z porównania odpowiedzi modeli na sinusoidalny sygnał wejściowy (rysunek 3) wynika, że model pochodno-całkowy przetwornika pomiarowego (11) prawidłowo odtwarza amplitudę sygnału wejściowego od początku symulacji. Model wyznaczony w klasyczny sposób (10) poprawnie odtwarza amplitudę sygnału wejściowego po wyjściu ze stanu nieustalonego - w przeprowadzonych badaniach po $0,02s$.

Rysunek 4 prezentuje porównanie częstotliwościowych charakterystyk Bodego dla dyskretnego modelu przetwornika pomiarowego i dyskretnego modelu przetwornika pomiarowego wyznaczonego zapisem różniczkowo-całkowym.



Rys.4. Porównanie charakterystyk Bodego modeli przetwornika pomiarowego.

Z charakterystyk Bodego (rysunek 4) wywnioskować można, że dla modelu przetwornika pomiarowego wyznaczonego metodą różniczkowo-całkową, w porównaniu z modelem wyznaczonym w sposób klasyczny, rozszerzony zostaje zakres przetwarzania amplitudy sygnału wejściowego o niskie częstotliwości. Dla prezentowanej charakterystyki wzmocnienie amplitudy modelu różniczkowo-całkowego równe 0 dB osiąga się dla częstotliwości od 0.001 rad/s, a dla „klasycznego” modelu od 100 Hz, przy stałym przesunięciu fazowym równym 180° .

4. WNIOSKI

Pochodna i całka dowolnych rzędów otwierają wiele możliwości w dziedzinie identyfikacji układów dynamicznych, tworzenia nowych, nieosiągalnych wcześniej algorytmów sterowania w układach ze sprzężeniami zwrotnymi. Można również rozważać rzędy jako funkcje czasu. Prowadzi to do równań różniczkowych o zmiennych, zależnych od czasu, rzędach.

Stosując metodę różniczkowo-całkową do tworzenia modeli przetworników pomiarowych drgań otrzymuje się model o idealnym, w przypadku odtwarzania amplitudy, przetwarzaniu sygnału wejściowego [9,13]. Należy tutaj podkreślić, że powszechnie znane pochodne są przypadkami szczególnymi prezentowanego w artykule rachunku. Całkowity rząd całki rozumiany jest jako odpowiadający krotności całki oznaczonej. Należałoby zatem mówić o rachunku różniczkowym i całkowym rzędu całkowitego i niecałkowitego, czyli dowolnego [11].

Dalszych badań wymaga sprawdzenie jak model przetwornika wyznaczony metodą różniczkowo-całkową odzwierciedla rzeczywistość przetwornik pomiarowy oraz czy oddaje on dokładniej dynamikę przetwarzania sygnału wejściowego niż model opisany „klasycznymi” równaniami różniczkowymi.

5. BIBLIOGRAFIA

- [1] Cioć R.: *Korekcja charakterystyk dynamicznych przetworników pomiarowych w diagnostyce wibracyjnej wagonu kolejowego*, Rozprawa doktorska, Biblioteka Główna Politechniki Radomskiej, Radom, 2007
- [2] Cioć R., Luft M.: *Valuation of software method of increase of accuracy measurement data on example of accelerometer*, Advances in Transport Systems Telematics, Monograph, Faculty of Transport, Silesian University of Technology, Katowice, 2006
- [3] Cioć R., Luft M.: *Correction of transducers dynamic characteristics in vibration research of means of transport – part 1 – simulations and laboratory research*, 10th International Conference “Computer Systems Aided Science, Industry and Transport”, Transcomp 2006, vol.1, Zakopane, 2006
- [4] Cioć R., Luft M.: *Metoda programowej korekcji dynamicznych błędów przetwarzania przetworników pomiarowych*, Pomiar Automatyka Komputery w gospodarce i ochronie środowiska, Kwartalnik Naukowo-Techniczny nr 2/2009, str. 22-25, ISSN 1889-6981, Fundacja Nauka dla Przemysłu i Środowiska, Rzeszów, 2009
- [5] Hagel R., Zakrzewski J.: *Miernictwo dynamiczne*, WNT, Warszawa, 1984
- [6] Jakubiec J., Roj J.: *Pomiarowe przetwarzanie próbkujące*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2000

-
- [7] Kaczorek T.: *Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2009
 - [8] Kaczorek T., Dzieliński A., Dąbrowski W., Łopatka R.: *Podstawy teorii sterowania*, WNT, Warszawa, 2006
 - [9] Luft M., Cioć R., Pietruszczak D.: *Measurement transducer modelled by means of classical integral-order differential equation and fractional calculus*, Proceedings of the 8th International Conference ELEKTRO 2010, ISBN 978-80-554-0196-6, Zilina, 2010
 - [10] Podlubny I.: *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999
 - [11] Ostalczyk P.: *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowanie w automatyce*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, ISBN 978-83-7283-245-0, Łódź, 2008
 - [12] Matlab®&Simulink®7, The MathWorks™, 2008
 - [13] Luft M., Szychta E., Cioć R., and Pietruszczak D: *Measuring Transducer Modelled by Means of Fractional Calculus*, Communications in Computer and Information Science, Poland 2010, pp. 286-295, Springer ISBN 978-3-642-16471-2.