

ANALIZA STATYCZNA I STATECZNOŚĆ PŁASKICH UKŁADÓW PRĘTOWYCH

Wyznaczenie statycznej siły krytycznej, krzywej utraty stateczności oraz ścieżek stanu równowagi statycznej w postaci zależności obciążenie przemieszczenie także głównego niestatecznego obszaru rezonansowego dla najmniejszej wartości własnej, umożliwia ilościową i jakościową ocenę wrażliwości konstrukcji prętowych. Do analizy stateczności zastosowano przybliżoną metodę stateczności oraz metodę elementów skończonych, która to umożliwia analizę stateczności, w funkcji wszystkich istotnych parametrów fizycznych, dla złożonych układów prętowych.

STRUCTURAL AND STABILITY ANALYSIS OF PLANE TRUSS SYSTEMS

Determining the main unstable areas of resonance at the lowest eigenvalues makes it possible to assess a structure as far as quantitative and qualitative aspects of dynamic stability are concerned. The areas were determined using the method of harmonic balance which is a very effective means of assessment when analyzing combined lattice girders. The method of finite elements allows to determine stable and unstable areas of resonance as a function of all essential physical parameters of combined lattice girders.

1. WSTĘP

Stateczność jest odpornością układu na zaburzenia, to znaczy zachowania ruchu /lub położenia równowagi/ przy działaniu małych zaburzeń. Jeżeli rozważany ruch /lub równowaga/ doznaje znaczących zmian nawet pod wpływem małych zaburzeń, to nazywamy go niestatecznym ruchem /niestateczną równowagą/.

Inaczej mówiąc, gdy zaburzenia wywołują ruch oddalający system od stanu równowagi lub drgania wokół stanu równowagi zachodzą ze zwiększającą się amplitudą, to stan równowagi jest niestateczny. Odwrotnie, jeżeli układ wraca do stanu początkowego lub oscyluje wokół niego ze stałą lub malejącą amplitudą, to równowaga jest stateczna. Jeśli zaburzenia początkowe wyrazić w przemieszczeniach, to w przypadku, gdy przemieszczenia układu są tego samego rzędu, co zaburzenia, to równowaga jest stateczna.

Istnieje bardzo duża klasa konstrukcji, dla których - z racji przyłożonych obciążeń - utrata ich zdolności do przejmowania wzrastających obciążeń następuje na skutek zjawiska

¹ Politechnika Radomska, Wydział Mechaniczny; 26-600 Radom, ul. Krasickiego 54

utrąty stateczności. W zależności od rodzaju obciążenia układu, statycznego czy dynamicznego, rozróżniamy stateczność statyczną i dynamiczną [4].

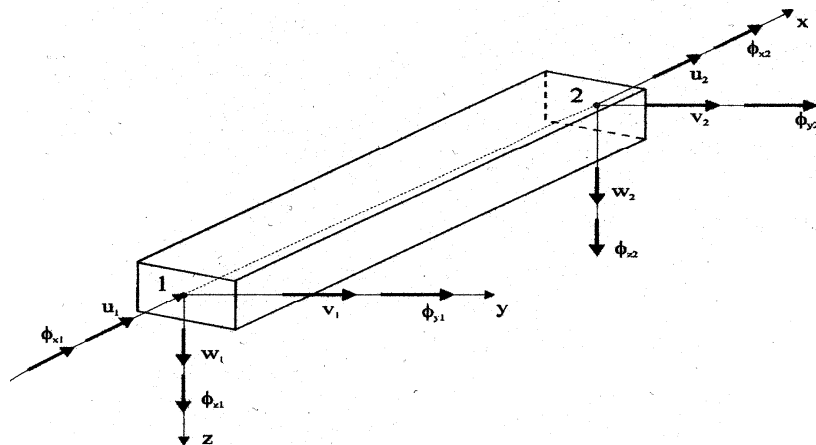
W ogólnym przypadku badania problemów stateczności konstrukcji prowadzą do zagadnień nieliniowych, które mogą być zbadane za pomocą iteracyjnej lub przyrostowej analizy dużych przemieszczeń. Istnieje jednak szeroka klasa zagadnień, w których przemieszczenia przed utratą stateczności są małe i wówczas równania równowagi w zakresie przedkrytycznym można zapisać dla konfiguracji początkowej [3]. W takich przypadkach utrata stateczności oznacza nagłe przejście konstrukcji do sąsiedniej konfiguracji równowagi. Jeśli zachowanie się konstrukcji przed utratą stateczności jest liniowe - małe przemieszczenia - i są one ortogonalne do postaci wyboczenia, to formułujemy problem stateczności początkowej, natomiast, gdy występują przemieszczenia zgodne z postacią wyboczenia, wówczas ich wpływ należy uwzględnić formułując zagadnienie stateczności zlinearyzowanej. W przypadku, gdy duże przemieszczenia powstają jeszcze przed stanem krytycznym, rozpatrujemy problem nieliniowy zachowania się konstrukcji w zakresie przedkrytycznym.

W niniejszej pracy rozpatrywana jest stateczność początkowa i zlinearyzowana oraz nieliniowa krzywa równowagi dla płaskich układów prętowych.

2. RÓWNANIA RÓWNOWAGI

Do sformułowania równań równowagi układów prętowych zastosowano metodę elementów skończonych, użyto dwuwęzłowego elementu prętowego (rys.2.1), przyjmując w węzłach po 6 stopni swobody; wektor uogólnionych przemieszczeń węzłowych jest postaci

$$\mathbf{q}^T = [u_1, v_1, w_1, \phi_{x1}, \phi_{y1}, \phi_{z1}, u_2, v_2, w_2, \phi_{x2}, \phi_{y2}, \phi_{z2}] \quad (2.1)$$



Rys.2.1. Element prętowy

natomiast, wektor przemieszczeń u elementu zapisano funkcją

$$u = [N_1^u, N_2^u, N_3^u, 0, N_5^u, N_6^u, N_7^u, N_8^u, N_9^u, 0, N_{11}^u, N_{12}^u] \mathbf{q} = [\mathbf{N}]_u \mathbf{q} \quad (2.2)$$

gdzie: $N_1^u = 1 - \xi$, $N_2^u = 6(\xi - \xi^2)\eta$, $N_3^u = 6(\xi - \xi^2)\zeta$, $N_5^u = (1 - 4\xi + 3\xi^2)L\zeta$,
 $N_6^u = (-1 + 4\xi + 3\xi^2)L\eta$, $N_7^u = \xi$, $N_8^u = 6(-\xi + \xi^2)\eta$, $N_9^u = 6(\xi - \xi^2)\zeta$,
 $N_{11}^u = (-2\xi + 3\xi^2)L\zeta$, $N_{12}^u = (2 - 3\xi^2)L\eta$, oraz: $\xi = \frac{x}{L}$, $\zeta = \frac{y}{L}$, $\eta = \frac{z}{L}$

są funkcjami kształtu, opisującymi przemieszczenie wzdłużne dowolnego punktu belki w funkcji przemieszczeń węzłowych wzdłużnych i poprzecznych oraz kątów ugięć.

Pole przemieszczeń poprzecznych punktów leżących na osi obojętnej elementu belkowego przyjęto w postaci

$$v = [0, N_2, 0, 0, 0, N_6, 0, N_8, 0, 0, 0, N_{12}] \mathbf{q} = [\mathbf{N}]_v \mathbf{q} \quad (2.3a)$$

$$w = [0, 0, N_3, 0, N_5, 0, 0, 0, N_9, 0, N_{11}, 0] \mathbf{q} = [\mathbf{N}]_w \mathbf{q} \quad (2.3b)$$

gdzie: $N_2 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$, $N_3 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$, $N_5 = (-\xi + 2\xi^2 - 3\xi^3)L$,
 $N_6 = (\xi - 2\xi^2 + 3\xi^3)L$, $N_8 = 3\xi^2 - 2\xi^3$, $N_9 = 3\xi^2 - 2\xi^3$, $N_{11} = (\xi^2 - \xi^3)$,
 $N_{12} = (-\xi^2 + \xi^3)$

są funkcjami kształtu opisującymi przemieszczenie poprzeczne w funkcji przemieszczeń węzłowych poprzecznych oraz kątów ugięć.

Funkcja kształtu kątów skręcenia przekrojów poprzecznych dana jest w postaci

$$\varphi = [0, 0, 0, N_4^s, 0, 0, 0, 0, 0, N_{10}^s, 0, 0] \mathbf{q} = [\mathbf{N}]_s \mathbf{q} \quad (2.4)$$

gdzie: $N_4^s = 1 - \xi$, $N_{10}^s = \xi$

Całkowite odkształcenie dowolnego włókna składa się z odkształcenia liniowego ε_l oraz nieliniowego ε_n , a więc $\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_n$

$$\varepsilon_l^T = \{\varepsilon_x^l, \gamma_{xy}^l, \gamma_{xz}^l\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\},$$

$$\varepsilon_n^T = \{\varepsilon_x^n, 0, 0\} = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], 0, 0 \right\} \quad (2.5)$$

w wyrażeniu na część nieliniową odkształcenia podłużnego ε_x^n pomija się kwadrat pochodnej składowej przemieszczenia u względem współrzędnej x . W zapisie macierzowym liniowa część odkształcenia (2.5) ma postać

$$\varepsilon_l = \mathbf{L}_1 \mathbf{u} = \mathbf{L}_1 \mathbf{H}_z \mathbf{N} \mathbf{q} = \mathbf{B}_0 \mathbf{q} \quad (2.6)$$

gdzie \mathbf{L}_1 jest operatorem różniczkowym. Po uwzględnieniu macierzy własności sprężystych \mathbf{D} , otrzymamy macierz sztywności liniowej postaci

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 dV \quad (2.7)$$

Macierz sztywności początkowych przemieszczeń wyznaczamy z części nieliniowej odkształcenia podłużnego ε_n (2.5), które można przedstawić jako

$$\varepsilon_n = \mathbf{B}_1(\mathbf{q})\mathbf{q} \quad (2.8)$$

Macierz początkowych przemieszczeń liniową względem przemieszczeń $\mathbf{K}_l(\mathbf{q})$ dla sformułowania nieprzyrostowego wyznaczono z zależności

$$\mathbf{K}_l^e(\mathbf{q}) = \int_{V_e} \mathbf{B}_0 \mathbf{D} \mathbf{B}_1 dV \quad (2.9)$$

Macierz początkowych naprężeń można wyznaczyć z

$$\mathbf{k}_\sigma^v = P_0 \int_0^L [\mathbf{N}'^T]_v [\mathbf{N}']_v dx, \quad \mathbf{k}_\sigma^w = P_0 \int_0^L [\mathbf{N}'^T]_w [\mathbf{N}']_w dx, \quad \mathbf{K}_\sigma^e(\sigma) = \mathbf{k}_\sigma^v + \mathbf{k}_\sigma^w \quad (2.10)$$

gdzie: P_0 - jest siłą normalną w przecie.

Problem liniowej równowagi statycznej opisany jest równaniem postaci

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P} \quad (2.11)$$

natomiast, problem stateczności opisany jest równaniem zagadnienia własnego postaci

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma(\sigma)]\mathbf{q} = 0 \quad \text{lub} \quad [\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma(\sigma) + \mathbf{K}_l(\mathbf{q})]\mathbf{q} = 0 \quad (2.12)$$

dla nieliniowej równowagi statycznej będą to równanie w przyrostach

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma(\Delta\sigma) + \mathbf{K}_l(\Delta\mathbf{q})]\Delta\mathbf{q} = \Delta\mathbf{P} \quad (2.13)$$

3. OBLICZENIA SIŁ KRYTYCZNYCH PRZY UTRACIE PŁASKIEJ POSTACI ZGINANIA

Kratownice płaskie jako układy nośne na przykład przekryć dachowych są powszechnie stosowane w konstrukcjach budowlanych, cechuje ich bowiem duża sztywność w płaszczyźnie geometrii w porównaniu z małą masą. Jednakże w przypadku wzrostu obciążenia dźwigary te mają skłonność do utraty stateczności, poprzez utratę płaskiej postaci zginania jako sztywnej formy nośnej, przechodząc do postaci wygiętej w kierunku prostopadłym do płaszczyzny w której zawarta jest ich geometria. Istotnym zatem jest wyznaczanie wartości obciążeń krytycznych. Poniżej zestawiono przykładowe obliczenia obciążeń krytycznych wykonane metodą przybliżoną stateczności, szczegółowo opisaną w literaturze [1] oraz metodą elementów skończonych [3, 4].

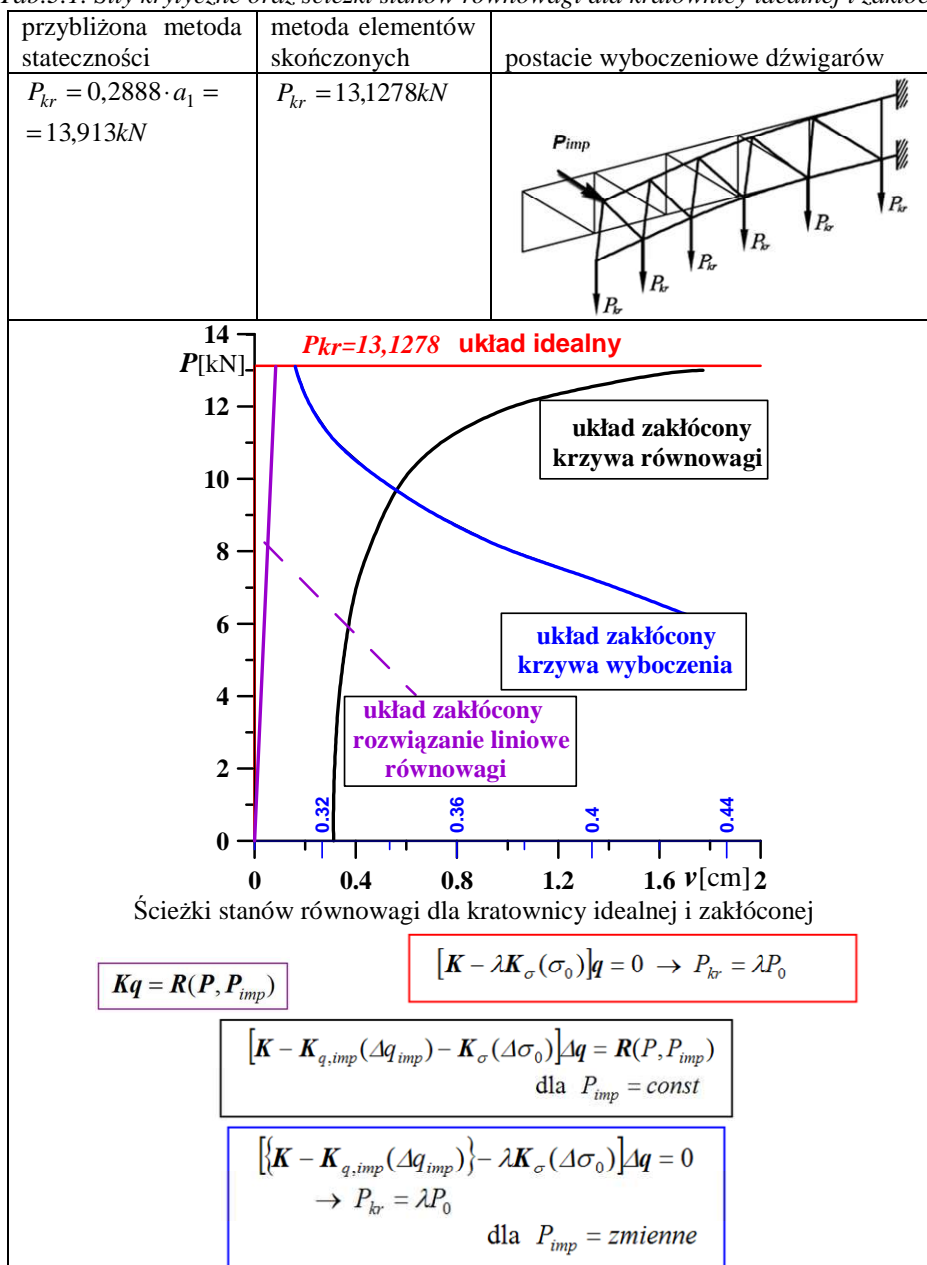
Zestawienie wyników sił krytycznych zawiera tab.3.1. Przyjęto wymiary segmentu dźwigara w kierunku wzdłużnym $a = 1m$, wysokość $b = 0,5m$. Pręty dźwigara są o przekroju poprzecznym rurowym średnicy $D = 60,3mm$ i grubości ścianki $t = 3,2mm$, moment bezwładności $J = 23,5cm^4$, sztywność zginania $a_1 = EJ = 2,05 \cdot 10^4 kN/cm^2 \cdot 23,5cm^4 = 48,175kNm^2$.

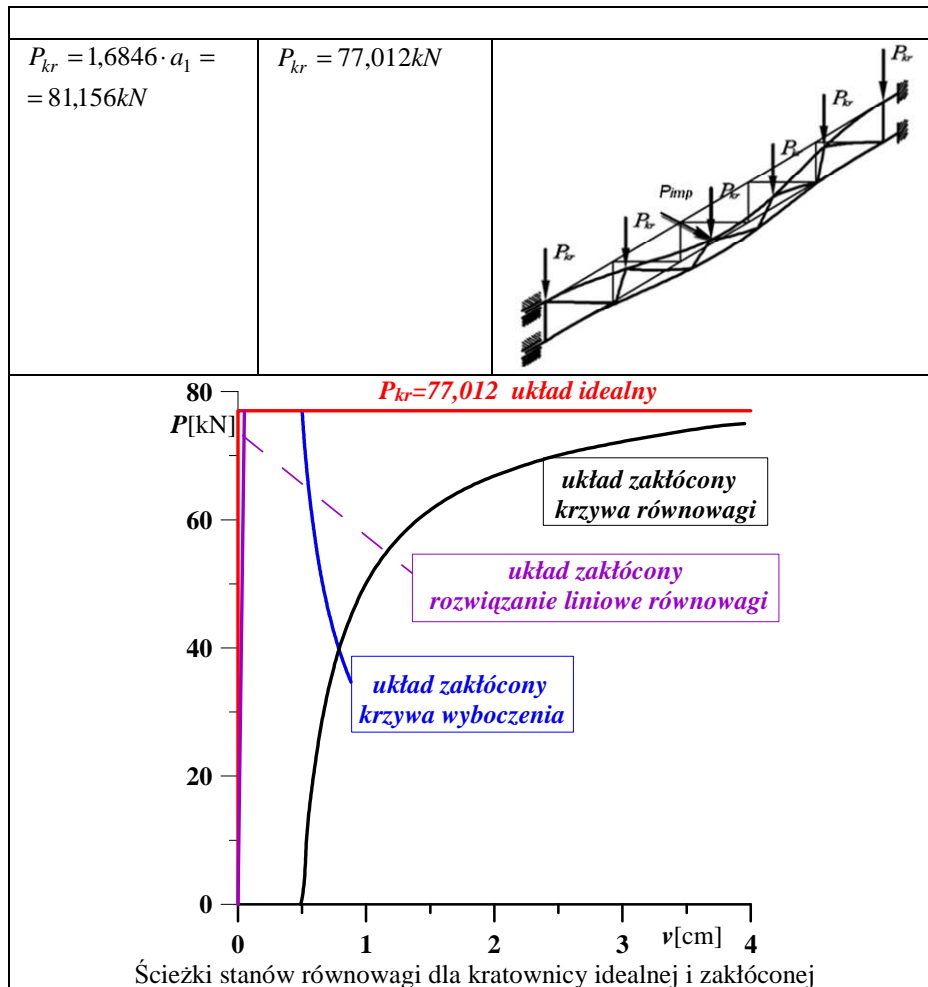
Podawany wynik na wartość sił krytycznych w funkcji sztywności zginania a_1 ma formę ogólną, pozwala na jego zastosowanie dla innych parametrów sztywności zgięciowej.

Dla dźwigarów zamieszczonych w tab.3.1 przeprowadzono obliczenia metodą elementów skończonych w zakresie stateczności liniowej i nieliniowej oraz stanu

równowagi układu zakłóconego. Otrzymano różne wartości sił krytycznych z dwóch różnych metod obliczeniowych, (metod przybliżonych) są na tyle zbliżone, że rozpatrywanie różnic w ich wartościach nie ma znaczenia praktycznego.

Tab.3.1. Siły krytyczne oraz ścieżki stanów równowagi dla kratownicy idealnej i zakłóconej





W wielu przypadkach opis liniowy umożliwia jedynie obliczenie obciążenia krytycznego. Do analizy stanu pokrytycznego trzeba zastosować sformułowanie nieliniowe, jeśli chcemy uzyskać krzywe równowagi, to jest relację: obciążenie-przemieszczenie wiodące.

Odstępstwa od założeń układu idealnego są nazywane imperfekcjami (nie dokładnościami). Uwzględnienie imperfekcji to, tak zwany układ zakłócony powoduje zmiany równań liniowych na nieliniowe i jednorodne na niejednorodne. Spośród możliwych odchyłek od modelu idealnego najprostszą odchyłką jest znane pole wstępnych imperfekcji, zależne tylko od jednego parametry, mimośród przyłożenia obciążenia skupionego, czy też dodatkowa siła zakłócająca na kierunku wyboczenia – jak założono w poniższych rozwiązaniach.

Imperfekcje mogą wpływać na obniżenie, podwyższenie, a nawet niewystępowanie obciążeń krytycznych, które zostały obliczone dla konstrukcji idealnej. Aby oszacować ten

efekt wykonuje się analizę wrażliwości na imperfekcje. W przypadku, jeśli postać geometryczna imperfekcji jest zbliżona do postaci utraty stateczności, to zamiast punktu bifurkacji w układzie idealnym pojawić się może punkt graniczny, obliczenie którego wymaga analizy nieliniowej niejednorodnych równań, a więc z reguły uwzględnienie imperfekcji może w istotny sposób komplikować analizę stateczności konstrukcji.

Nieliniowość stanu przedbifurkacyjnego oznacza pojawienie się składowych przemieszczeń odpowiadających postaci wybożenia, co powoduje że otrzymuje się krzywoliniową ścieżkę równowagi, zamiast prostej pokrywającej się z osią rzędnych.

Nieliniową ścieżkę równowagi, można obliczyć z nieliniowych równań, ścieżka ta zbliża się asymptotycznie do prostej równoległej do osi odciętych wyprowadzonej z punktu bifurkacji, jeśli utrata stateczności występuje w stanie sprężystym.

4. BIBLIOGRAFIA

- [1] Misiak J., *Stateczność konstrukcji prętowych*, PWN, Warszawa 1990r.
- [2] Misiak J., Stachura S., *Wybrane zagadnienia stateczności statycznej i dynamicznej konstrukcji prętowych i powłokowych*, Oficyna Wydawnicza WSEiZ, Warszawa 2010r.
- [3] Wieczorek M., *Numeryczna analiza konstrukcji podatnych na wybożenie*, WAT, Dodatek do biuletynu nr 11(411), Warszawa 1986r.
- [4] Misiak J., Stachura S., Stateczność statyczna i dynamiczna stalowej kopuły prętowej, *Problemy Współczesnej Architektury i Budownictwa*, str.112-118, Archbud, Warszawa 2009r.