

Kazimierz DROZD¹

OBLICZANIE ODKSZTAŁCEŃ SPRĘŻYSTEJ PRÓBKII PRZY UŻYCIU PROGRAMU DOSTĘPNEGO ONLINE

W pracy przedstawiono rozwiązanie analityczne równania różniczkowego ugięcia płaskiej belki wspornikowej obciążonej siłą pionową oraz dokonano analizy możliwości jego zastosowania do obliczeń ugięcia próbek stosowanych do badań wytrzymałości zmęczeniowej. Całkowanie równań prowadzi do wyznaczenia ścisłej matematycznie zależności kąta ugięcia od bieżącej zmiennej niezależnej (odległości od początku układu współrzędnych). Zastosowanie znanego rozwiązania, w przypadku występowania dużych ugięć belki, prowadzi do znacznych błędów, przekraczających 11% wartości kąta ugięcia.

CALCULATION OF DISTORTION OF ELASTIC SPECIMEN USING ONLINE APPLICATION

Analytical solution of differential equation of flat elastic bracket distortions' under vertical force is shown in the paper. Result of integration of the equation is coincidence only for relation between deflection angle and distance from fixed point of beam. In the case of using simple solution of equation to analyze deflection of a spring, the error may be over 11% of deflection angle value.

1. WSTĘP

Aby wyznaczyć wartości naprężeń odpowiadających trwałej wytrzymałości zmęczeniowej dla elementów sprężystych konieczne jest wywoływanie odpowiednio dużych odkształceń. Matematyczny opis takiego problemu jest różny niż uproszczone zależności odpowiednie do analizy typowych konstrukcji inżynierskich o dużej sztywności. Dokładnego rozwiązania ugięcia sprężystej belki nie można przedstawić z powodu trudności analitycznego całkowania równania różniczkowego, dlatego wykorzystuje się metody prowadzące do rozwiązań przybliżonych. [1, 2]

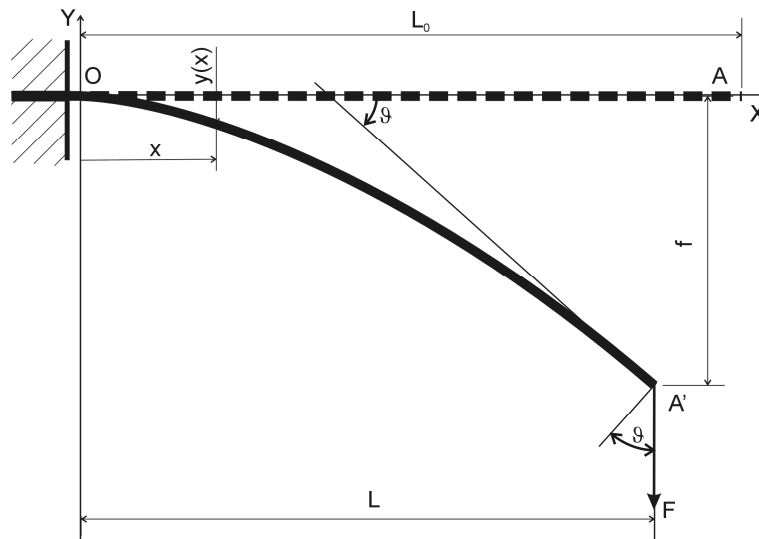
Zaprogramowano badania zmęczeniowe na zginanie próbek płaskich o przekroju 2x20 mm. Długość próbek określono na 250 mm, w tym część uchwytna obejmowała 30 mm. Długość jest tak dobrana, aby przy możliwie małych wartościach siły wymuszającej uzyskać wymaganą maksymalną wartość naprężenia, odpowiadającą orientacyjnej wartości

¹ Politechnika Lubelska, Wydział Mechaniczny; 20-618 Lublin, ul. Nadbystrzycka 38 D.
tel. +48 81 5384215; e-mail: k.drozd@pollub.pl

granicy zmęczenia, która dla stali sprężynowych może przekraczać 1100 MPa [3,4]. Z uwagi na dużą długość próbek oraz znaczne naprężenia i odkształcenia zdecydowano sprawdzić, według jakiej zależności można obliczyć ugięcie próbek. Problem ten można rozwiązać różnymi metodami, w tym poprzez symulacje MES, lecz zdecydowano wykorzystać oprogramowanie online wspomagające obliczenia analityczne, co jest możliwe do wykonania dysponując wyłącznie dostępem do sieci [5].

Celem pracy było analityczne rozwiązanie równania różniczkowego ugięcia płaskiej belki wspornikowej obciążonej siłą pionową. Obliczenia prowadzono z wykorzystaniem oprogramowania WolframAlpha firmy Wolfram Research Company, dostępnego online [6]. Uzyskane rozwiązanie poddano analizie pod kątem możliwości jego zastosowania do obliczeń ugięć próbek stosowanych do badań wytrzymałości zmęczeniowej.

2. WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ



Rys. 1. Schemat działania wymuszenia na prostą belkę wspornikową

Rozpatrzmy umieszczenie próbki (belki wspornikowej) jak na rys. 1 z wymuszeniem w postaci siły pionowej. Bez udziału obciążenia zewnętrznego próbka prosta zajmuje położenie równoległe do osi x . Rys. 1 przedstawia maksymalne ugięcie próbki, kiedy strzałka ugięcia punktu przyłożenia siły A' wynosi f a odpowiadający jej kąt ugięcia - ϑ .

$$\sigma_g = \frac{6 \cdot F \cdot L}{b \cdot h^2} < 0 \quad (1)$$

gdzie: σ_g - naprężenia generowane przez siłę F ,

L - ramię działania siły F ,

b - szerokość próbki,

h - wysokość próbki.

Siłą wymuszającą zginanie próbki jest siła pionowa F . Po zmierzeniu ramienia działania L tej siły, tj. poziomej odległości od punktu przyłożenia siły do miejsca zamocowania, można obliczyć naprężenia zginające σ_g z zależności (1). Wartość tych naprężeń jest ujemna z powodu zwrotu siły „w dół” [7].

W celu osiągnięcia naprężeń o wartości ponad 1100 MPa konieczne jest obciążenie próbki siłą do wartości około 80 N. Długość pozioma próbki o początkowej długości 220 mm, określona na podstawie eksperymentu, wyniesie wtedy około 175 mm. Takie warunki obciążenia umożliwiają uzyskanie naprężeń zginających o maksymalnej wartości około 1167 MPa [8].

3. KĄT UGIĘCIA PRÓBKII

Równanie różniczkowe dowolnej krzywej ma postać określoną zależnością (2) [9]:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} \quad (2)$$

gdzie: ρ - promień.

Związek między krzywizną, obciążeniem momentem gnącym i sztywnością na zginanie określają zależności (3).

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{M(x)}{E \cdot J(x)} \quad (3)$$

gdzie: M – moment zginający,

E – moduł Younga,

J – osiowy moment bezwładności przekroju,

$x \leq L$ – bieżąca zmienna niezależna.

Uwzględniając znak momentu zginającego i orientację układu współrzędnych (rys. 1), w rozpatrywanym modelu, można zapisać następująco:

$$\frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{M(x)}{E \cdot J(x)} \quad (4)$$

Składnik w mianowniku pod pierwiastkiem y'^2 z lewej strony równania (4), jako nieskończenie mały wyższego rzędu, w większości zagadnień technicznych jest pomijany, co prowadzi do znanej zależności uproszczonej (5). Ze względu na duże odkształcenia próbek zależności tej nie można zastosować do wyliczenia ich ugięć [1, 2].

$$y'' = \frac{M(x)}{E \cdot J(x)} \quad (5)$$

Wartość momentu zginającego można wyznaczyć z zależności (6). Moment bezwładności przekroju próbki określa zależność (7). Równanie (4) można zapisać w postaci (8).

$$M(x) = F_y \cdot (L - x) \quad (6)$$

$$J = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (7)$$

$$\frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} = \frac{F \cdot (L - x)}{E \cdot J} \quad (8)$$

Całkowanie analityczne stronami równania (8) można przeprowadzić po podstawieniu

$$p_3 = y' \text{ oraz } p'_3 = \frac{dp_3}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' :$$

$$\int \frac{dp_3}{\sqrt{(1 + p_3^2)^3}} = \frac{F}{E \cdot J} \int (L - x) \cdot dx + C_1 \quad (9)$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych $y' = p_3 = 0$ dla $x = 0$, których konsekwencją jest zerowa wartość stałej całkowania C_1 otrzymujemy:

$$\frac{p_3}{\sqrt{1 + p_3^2}} = \frac{F}{E \cdot J} \cdot \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) \quad (10)$$

Równanie (10) ma dwa pierwiastki różniące się znakiem. W rozpatrywanym przypadku wartość kąta ugięcia powinna być mniejsza od zera. Wartość bezwzględną kąta ugięcia w funkcji odległości od zamocowania można wyznaczyć z zależności (11).

$$\vartheta(x) = y' = p_3 = \frac{F \cdot x \cdot (2 \cdot L - x)}{\sqrt{4 \cdot E^2 \cdot J^2 - F^2 \cdot x^2 \cdot (-2 \cdot L + x)^2}} \quad (11)$$

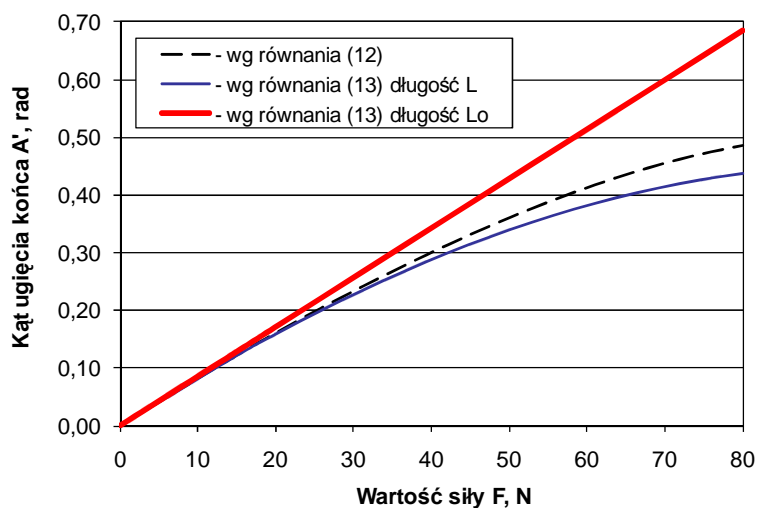
gdzie: ϑ – kąt ugięcia.

Maksymalny kąt ugięcia wystąpi w miejscu działania wymuszenia a jego bezwzględna wartość wyniesie (12):

$$\vartheta(x=L) = \frac{F \cdot L^2}{\sqrt{4 \cdot E^2 \cdot J^2 - F^2 \cdot L^4}} \quad (12)$$

$$\vartheta_0 = \frac{F \cdot L_0^2}{2 \cdot E \cdot J} \quad (13)$$

Równanie (12) jest podobne do znanego równania (13), określającego maksymalny kąt ugięcia belek dla małych ugięć, które można obliczyć przez całkowanie zależności (5). Należy zauważyć, że rozwiązanie dokładne (12) prowadzi do wyników o większych wartościach. Istotna różnica pomiędzy zależnościami (13) i (12) dotyczy wielkości L , określającej długość belki. Dla małych ugięć przyjmuje się długość w stanie nieodkształconym, a w zależności (12) występuje długość w kierunku poziomym mierzona podczas działania obciążenia.



Rys. 2. Porównanie wartości kątów ugięcia, obliczonych według różnych zależności

Porównanie wartości kątów ugięcia obliczonych wg zależności (12) i (13), dla wartości L zmierzonych eksperymentalnie, przedstawiono na rys. 2. Wartość modułu Younga użyta do obliczeń wynosiła 212 GPa. Maksymalna różnica wartości kątów ugięcia, w zakresie obciążeń koniecznych do uzyskania w badaniach, przekracza 10 %. Już przy obciążeniu 25 N (maksymalne naprężenia zginające o wartości około 434 MPa) występuje ponad 2 % różnica wartości kątów ugięcia liczonych tymi metodami. Jedynie zastosowanie w zależności (13) początkowej długości próbki L_0 (liniowa zależność na rys. 2) powoduje, że wartości ugięć są większe niż obliczone wg zależności dokładnej (12).

4. OBLICZENIA UGIĘCIA LINIOWEGO WSPOMAGANE WOLFRAMALPHA

$$\begin{aligned}
 y' = & \frac{F \cdot L}{E \cdot J} \cdot x - \frac{F}{2 \cdot E \cdot J} \cdot x^2 + \frac{F^3 \cdot L^3}{2 \cdot E^3 \cdot J^3} \cdot x^3 - \frac{3 \cdot F^3 \cdot L^2}{4 \cdot E^3 \cdot J^3} \cdot x^4 + \frac{3 \cdot F^3 \cdot L \cdot (E^2 \cdot J^2 + F^2 \cdot L^4)}{8 \cdot E^5 \cdot J^5} \cdot x^5 - \\
 & - \frac{F^3 \cdot (E^2 \cdot J^2 + 15 \cdot F^2 \cdot L^4)}{16 \cdot E^5 \cdot J^5} \cdot x^6 + \frac{5 \cdot F^5 \cdot L^3 \cdot (3 \cdot E^2 \cdot J^2 + F^2 \cdot L^4)}{16 \cdot E^7 \cdot J^7} \cdot x^7 - \\
 & - \frac{5 \cdot F \cdot (3 \cdot E^2 \cdot J^2 \cdot F^4 \cdot L^2 + 7 \cdot F^6 \cdot L^6)}{32 \cdot E^7 \cdot J^7} \cdot x^8 + \frac{5 \cdot F^5 \cdot L \cdot (3 \cdot E^4 \cdot J^4 + 42 \cdot E^2 \cdot J^2 \cdot F^2 \cdot L^4 + 7 \cdot F^4 \cdot L^8)}{128 \cdot E^9 \cdot J^9} \cdot x^9 - \\
 & - \frac{F^5 \cdot (3 \cdot E^4 \cdot J^4 + 350 \cdot E^2 \cdot J^2 \cdot F^2 \cdot L^4 + 315 \cdot F^4 \cdot L^8)}{256 \cdot E^9 \cdot J^9} \cdot x^{10} + \dots
 \end{aligned} \quad (14)$$

Analityczne całkowanie równania (11) sprawia problemy. Łatwiej można go rozwiązać po uprzednim rozwinięciu w szereg potęgowy. W tym miejscu można wykorzystać program WolframAlpha umożliwiający obliczenia online na zdalnej maszynie. Bezpośrednie wpisanie prawej strony równania w okno edycyjne może być przyczyną frustracji, ponieważ program stara się interpretować wpisywany tekst i tak np. literę L może traktować jako jednostkę litr a literę E – jako podstawę logarytmów naturalnych. Niedogodności te można łatwo ominąć przez zmianę oznaczeń na czas obliczeń. Przykład rozwinięcia w szereg 10 stopnia, względem zmiennej niezależnej x , uzyskany opisaną metodą, podano jako zależność (14).

Po scałkowaniu otrzymujemy zależność (15) umożliwiającą obliczenie ugięcia dowolnego przekroju próbki. Warunkiem skorzystania z zależności (15) jest podanie, oprócz wielkości charakteryzujących właściwości geometryczne próbki (J) i warunki badania (F i L), wartości modułu sprężystości liniowej E charakteryzującego materiał próbki pod względem wytrzymałości m.in. na zginanie. Do dalszych obliczeń przyjęto, że moduł Younga ma wartość 212 GPa.

$$\begin{aligned}
 y(x) = & \frac{F \cdot L}{2 \cdot E \cdot J} \cdot x^2 - \frac{F}{6 \cdot E \cdot J} \cdot x^3 + \frac{F^3 \cdot L^3}{8 \cdot E^3 \cdot J^3} \cdot x^4 - \frac{3 \cdot F^3 \cdot L^2}{20 \cdot E^3 \cdot J^3} \cdot x^5 + \left(\frac{F^3 \cdot L}{16 \cdot E^3 \cdot J^3} + \frac{F^5 \cdot L^5}{20 \cdot E^5 \cdot J^5} \right) \cdot x^6 - \\
 & - \left(\frac{F^3}{112 \cdot E^3 \cdot J^3} + \frac{15 \cdot F^5 \cdot L^4}{112 \cdot E^5 \cdot J^5} \right) \cdot x^7 + \left(\frac{15 \cdot F^5 \cdot L^3}{128 \cdot E^5 \cdot J^5} + \frac{5 \cdot F^7 \cdot L^7}{128 \cdot E^7 \cdot J^7} \right) \cdot x^8 - \left(\frac{5 \cdot F^5 \cdot L^2}{96 \cdot E^5 \cdot J^5} + \frac{35 \cdot F^7 \cdot L^6}{288 \cdot E^7 \cdot J^7} \right) \cdot x^9 + \\
 & + \left(\frac{3 \cdot F^5 \cdot L}{256 \cdot E^5 \cdot J^5} + \frac{21 \cdot F^7 \cdot L^5}{128 \cdot E^7 \cdot J^7} + \frac{7 \cdot F^9 \cdot L^9}{256 \cdot E^9 \cdot J^9} \right) \cdot x^{10} - \left(\frac{3 \cdot F^5}{2816 \cdot E^5 \cdot J^5} + \frac{175 \cdot F^7 \cdot L^4}{1408 \cdot E^7 \cdot J^7} + \frac{315 \cdot F^9 \cdot L^8}{2816 \cdot E^9 \cdot J^9} \right) \cdot x^{11} + \dots
 \end{aligned} \quad (15)$$

Równanie (15), po podstawieniu $x=L$ i pominięciu po prawej stronie wyrazów drugiego i kolejnych, sprowadza się do znanej zależności do obliczania strzałki ugięcia belki wspornikowej dla małych ugięć (18). Przy czym prawdziwa jest zależność (19). Dla dużych ugięć zależność matematycznie podobna do (19) nie występuje, lecz można sprawdzić, w jakich warunkach jej zastosowanie nie prowadzi do dużych błędów. Jest to o tyle ważne, że równanie (12) określające ϑ jest rozwiązaniem ścisłym matematycznie. Odpowiednia zależność miałaby postać (20).

$$D = \frac{F}{E \cdot J} \quad (16)$$

$$f = \frac{D \cdot L^3}{3} + \frac{D^3 \cdot L^7}{35} + \frac{D^5 \cdot L^{11}}{231} + \frac{D^7 \cdot L^{15}}{1287} + \frac{19537 \cdot D^9 \cdot L^{19}}{4685824} + \frac{58335 \cdot D^{11} \cdot L^{23}}{425984} + \frac{31669 \cdot D^{13} \cdot L^{27}}{163840} + \frac{429 \cdot D^{15} \cdot L^{31}}{31768} \quad (17)$$

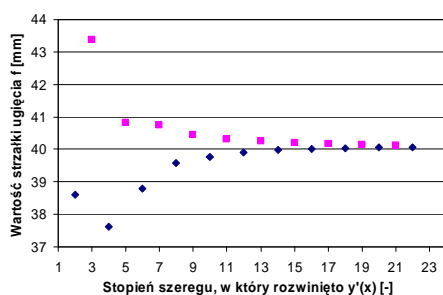
$$f_0 = \frac{F \cdot L_0^3}{3 \cdot E \cdot J} \quad (18)$$

$$f_0 = \frac{2 \cdot L_0}{3} \cdot \vartheta_0 \quad (19)$$

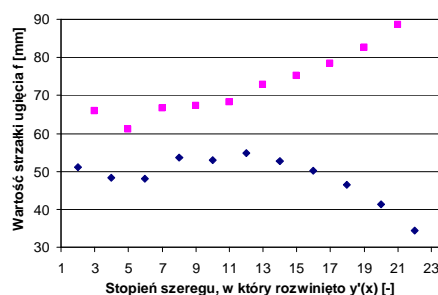
$$f_\vartheta = \frac{2 \cdot F \cdot L^3}{3 \cdot \sqrt{4 \cdot E^2 \cdot J^2 - F^2} \cdot L^4} \quad (20)$$

Na rys. 3 przedstawiono zależność wartości strzałek ugięcia w funkcji stopnia szeregu, w który rozwinięto wzór (14). Obliczenia wartości strzałek ugięcia prowadzono wg zależności (15). Dla małych i średnich obciążeń, stopniowo zwiększając stopień rozwinięcia, otrzymano rozwiązania dwustronnie zbieżne (rys. 3a). W przedstawionym przypadku strzałka ugięcia osiąga wartość 40,1 mm.

a)



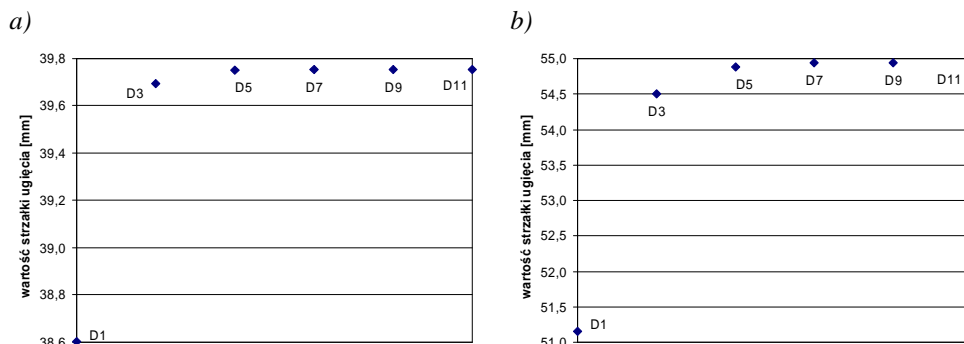
b)



Rys. 3. Wartości strzałek ugięcia próbki o przekroju 20x2mm, obliczone wg wzoru (15) w zależności od stopnia szeregu, w który rozwinięto równanie (14): a) obciążenie 40 N; b) obciążenie 80 N

Bezpośrednie zastosowanie zależności (15), po jej ograniczeniu do konkretnego stopnia zmiennej niezależnej x , choć wydaje się uzasadnione, nie jest poprawne. Przekonujemy się o tym przeprowadzając obliczenia dla większych obciążeń (rys. 3b). W takim przypadku otrzymujemy rozbieżne wyniki przy matematycznym zwiększaniu dokładności (stopnia zmiennej niezależnej x).

$$f_{D11} = \frac{D \cdot L^3}{3} + \frac{D^3 \cdot L^7}{35} + \frac{D^5 \cdot L^{11}}{231} + \frac{D^7 \cdot L^{15}}{1287} + \frac{7 \cdot D^9 \cdot L^{19}}{46189} + \frac{3 \cdot D^{11} \cdot L^{23}}{96577} \quad (21)$$



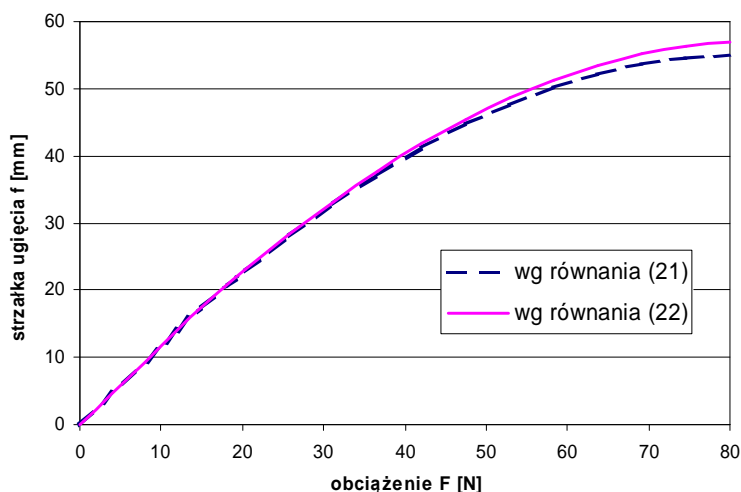
Rys. 4. Wartości strzałek ugięcia próbki obliczone przy ograniczeniu równania (21) do różnych stopni stałej D : a) obciążenie 40 N; b) obciążenie 80 N

Jednostronnie zbieżne wyniki otrzymujemy zawsze po posortowaniu zależności (15) pod względem stopnia stałej D . Jest to sposób grupowania wymiarowego tzn. ograniczenie zależności do stopnia wymiaru, np. N^7 dla siły. Należy wnioskować, że odpowiednią zależnością do obliczania ugięć jest wzór (15), który może być ograniczony do wyrazów stanowiących iloczyn ze stałą D poniżej konkretnego stopnia. Dla punktu A' próbki, przy ograniczeniu do 11 stopnia stałej D , jest to zależność (21).

$$y(x) = \frac{D}{2} \cdot \left(L \cdot x^2 - \frac{x^3}{3} \right) + \frac{D^3}{4} \cdot \left(\frac{L^3 \cdot x^4}{2} - \frac{3 \cdot L^2 \cdot x^5}{5} + \frac{L \cdot x^6}{4} - \frac{x^7}{23} \right) + \frac{3 \cdot D^5}{16} \cdot \left(\frac{L^5 \cdot x^6}{3} - \frac{5 \cdot L^4 \cdot x^7}{7} + \frac{5 \cdot L^3 \cdot x^8}{8} - \frac{5 \cdot L^2 \cdot x^9}{18} - \frac{x^{11}}{176} \right) \quad (22)$$

Zestawienie wartości strzałek ugięcia badanej próbki przy ograniczeniu równania (21) do różnych stopni stałej D przedstawiono na rys. 4. Zestawiono wyniki dla średnich (rys. 4a) i dużych (rys. 4b) obciążeń i w każdym przypadku zwiększanie dokładności obliczeń przez podwyższanie stopnia stałej D pozwala uzyskać wyniki bardziej zbliżone do wartości rzeczywistych.

Rys. 4a można porównywać z rys. 3a, ponieważ w tych przypadkach obliczenia wykonano dla obciążenia o tej samej wartości. Strzałka ugięcia obliczona wg zależności (21) wyniosła 39,754mm (rys. 4a) i jest mniejsza o 0,351mm od obliczonej wg zależności (15). Różnica ta stanowi 0,87% i oznacza, że nawet dla średnich wartości obciążeń zastosowanie zależności (15) prowadzi do niedokładności.



Rys. 5. Porównanie wartości strzałek ugięcia próbki

W rozpatrywanym przypadku już przy ograniczeniu równania (21) do 2 wyrazów (trzeciego stopnia stałej D) jest obarczone niedokładnością mniejszą niż 1% w relacji do obliczeń z użyciem całego równania (21). Do większości zagadnień można użyć zależności (15) z pominięciem wyrazów przy D^7 i dalszych jak w (22). W takim przypadku maksymalna niedokładność nie powinna przekraczać 0,12%. Maksymalne różnice względne przy obliczeniach z zastosowaniem 9 i 11 stopnia stałej D stanowią ułamek promila.

Z porównania wartości strzałek ugięcia obliczonych z zależności (20) i (21) przedstawionego na rys. 5 wynika, że dla sił mniejszych od 30N różnica względna nie przekracza 1%. W całym zakresie obciążeń można zastosować zależność (20) mając świadomość niedokładności o maksymalnej wartości nie przekraczającej 3,5%.

$$E = \frac{F \cdot L^2}{2 \cdot J \cdot \vartheta} \cdot \sqrt{1 + \vartheta^2} \quad (23)$$

Równanie (12), które jest matematycznie ściśle można wykorzystać do wyznaczenia modułu Younga dla próbki zginanej. Po przekształceniu odpowiednia zależność ma postać (23). Konieczne jest eksperymentalne wyznaczenie siły F , długości L , kąta ugięcia ϑ oraz wymiarów poprzecznych przekroju próbki (belki wspornikowej).

5. WNIOSKI

Odpowiednią zależnością do obliczania kąta ugięcia dla dużych ugięć belki wspornikowej o stałym przekroju jest zależność (11). Wartość kąta ugięcia końca takiej belki można obliczyć z zależności (12).

Wartości kątów ugięcia i ugięć liniowych, obliczone przez całkowanie równania (4) bez uproszczeń, były zawsze większe niż obliczone po zastosowaniu uproszczenia dla małych

ugięć. Wyjątkiem była liniowa zależność (13) $v_0(F)$ kiedy obliczenia prowadzono przyjmując stałą długość próbki L_0 jak w stanie nieodkształconym.

Z powodu złożoności równań występują problemy podczas analitycznego całkowania równania (11) tzn., że ugięcie liniowe belki wspornikowej można obliczyć z zależności przybliżonych. Bezpośrednie zastosowanie rozwiązania (15) daje zadowalające wyniki dla obciążeń o małych i średnich wartościach. Obliczanie ugięć liniowych dla największych obciążeń wg zależności, której kolejne wyrazy stanowią kolejne stopnie zmiennej niezależnej, prowadzi do uzyskania rozbieżnych wyników.

W celu zapewnienia dostatecznej dokładności obliczeń zależność (15) należy pogrupować względem stopnia stałej D . Odpowiednią zależnością do obliczania strzałki ugięcia dla dużych ugięć jest zależność (21). Do obliczania przebiegu ugięć belek wspornikowych, w większości zagadnień, można użyć równania (22), czyli z pominięciem wyrazów przy D^7 i dalszych. W takim przypadku maksymalna niedokładność nie powinna przekraczać 0,12%.

Znając wartości wymiarów poprzecznych, długości poziomej próbki (belki wspornikowej), siły wymuszającej i modułu Younga możemy z przedstawionych równań obliczyć dla dowolnego przekroju kąt i ugięcie liniowe. Korzystając ze ścisłego rozwiązania (12) i odwracając zagadnienie można wyliczyć moduł Younga dla przedstawionego elementu zginanego przy wywoływaniu dowolnych odkształceń. Odpowiednia zależność ma postać (23).

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Watson L.T., Wang C.Y.: Circular leaf spring. *Acta Mechanica*, (40)1981, 25-32
- [2] Suguiyama H., Shabana A.A., Omar M.A., Loh W-L.: Development of nonlinear elastic leaf spring model for multibody vehicle systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(2006), 6925-6941
- [3] Reimpell J., Betzler J.: *Fahrwerktechnik. Grundlagen*. Vogel Buchverlag, Würzburg 2000
- [4] Wang Q.Y., Berard J.Y., Rathery S., Bathias C.: High-cycle Fatigue Crack Initiation and Propagation Behaviour of High-strength Spring Steel Wires. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, (22)1999, 673-677
- [5] Добровольский В.И., Пряхин В. В.: Установка для программных испытаний материалов на малоцикловую усталость при чистом изгибе. *Заводская Лаборатория*, (4)1982, 77-79
- [6] www.wolframalpha.com - WolframAlpha computational knowledge engine. Wolfram Research Company. Program elektroniczny online (dostęp wrzesień 2010 r.)
- [7] Li D.M., Kim K.W., Lee C.S.: Low cycle fatigue data evaluation for a high-strength spring steel. *International Journal of Fatigue*, (19)1997, 607-612
- [8] Drozd K., Weroński A.: Analiza dokładności obliczeń elementów resorów w aspekcie wpływu wymiarów i właściwości materiałowych. *Przegląd Mechaniczny*, (9)2002, 11-17
- [9] Savaidis G., Riebeck L., Feitzelmayer K.: Fatigue life improvement of parabolic leaf spring. *Materialprüfung. Materials Testing*, (41)1999, 234-240