

Kontakt skrętny z uwzględnieniem częściowych poślizgów

Słowa kluczowe: zagadnienie skrętnie styku ciał, sztywny stempel, elastyczna półprzestrzeń, tarcie, przyczepność, częściowy poślizg, równanie całkowe

Streszczenie

Badane jest ogólne rozwiązanie osiowosymetrycznego zagadnienia skręcania z uwzględnieniem częściowych poślizgów dla danego rozkładu naprężeń normalnych i znanej wielkości strefy styku. Rozważane są dowolne geometrie styku ciał. Przedstawione podejście jest odmienne, niż w rozwiązaniu klasycznym, w którym stosuje się teorię Hertza. Problem częściowych poślizgów sprowadza się do równań całkowych rozwiązywanych numerycznie. Przedstawione wyniki są zgodne z klasycznym rozwiązaniem dla styku skrętnego dwóch kul, a w szczególności z zależnością pomiędzy kątem skręcania i wielkością strefy przyczepności w zagadnieniu Lubkina.

TORSIONAL CONTACT CONDITIONS INCLUDING PARTIAL SLIPS

Abstract

The purpose of the study was to analyze the general solution to an axially symmetric torsion problem taking into account partial slips for a known normal stress distribution and a known contact area. Different geometries of contact were considered. The approach presented in this paper differs from the classical solution in which the Hertz theory is used. The partial slip problem was reduced to integral equations solved numerically. The results are compatible with those of the classical solution to a torsional contact problem for two spheres, especially if there is a relationship between the angle of torsion and the size of the stick zone in a Lubkin's problem.

1. WSTĘP

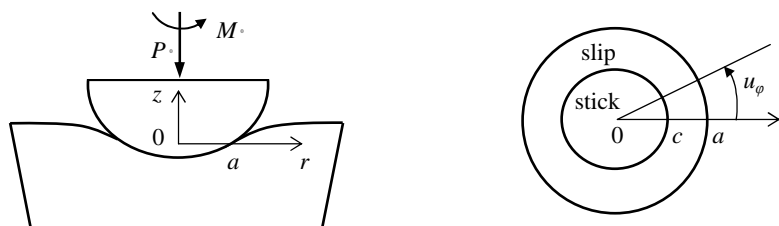
W klasycznych pracach dotyczących badania częściowych poślizgów przy styku skręcania [2] bardzo istotnym założeniem jest to, że geometria ciał jest kulista, a normalny kontakt jest opisany w ramach teorii Hertza [1]. Jäger [8] uogólnił zagadnienie kontaktu z uwzględnieniem częściowych poślizgów dla dowolnej, lecz gładkiej powierzchni ciał, przytaczając zastosowanie swojej teorii dla geometrii wielomianowej, mianowicie do opisu profilu podstawy stempla użyto funkcji x^{2n} , $n = 1, 2, 3, \dots$

W niniejszym artykule badamy inne ogólne rozwiązanie zagadnienia skręcania z uwzględnieniem częściowych poślizgów, przy założeniu, że znany jest rozkład naprężeń normalnych oraz wielkość strefy styku. Na początku zakładamy, że przy przyłożeniu momentu obrotowego powstałe siły tarcia są wystarczająco duże, aby przeciwdziałać poślizgowi, tzn. rozważamy zagadnienie skręcania przy całkowitej przyczepności, które rozwiązujemy w punkcie 2.1. Udowadniamy podział strefy styku na obszary przyczepności i poślizgów. Następnie w punkcie 2.2 rozpatrujemy ogólne zagadnienie skręcania przy uwzględnieniu częściowych poślizgów. Wyniki są porównane z klasycznym rozwiązaniem.

2. UOGÓLNIONY KONTAKT SKRĘTNY Z UWZGLĘDNIENIEM CZĘŚCIOWYCH POŚLIZGÓW

2.1 Zagadnienie skręcania – całkowita przyczepność

Rozważamy zagadnienie osiowosymetrycznego styku ciał, jedno z których jest sztywnym stemplem, a drugie sprężystą półprzestrzenią, w układzie współrzędnych walcowych $0r\varphi z$. Niech znany jest rozkład nacisków normalnych pomiędzy ciałami $p(r)$ i wielkość kołowej strefy styku. Następnie przyłożony jest moment obrotowy M , który nie ma wpływu na zagadnienie normalne [4]. Rys.1 ilustruje powstawanie poślizgów w strefie styku ciał przy nacisku P i momencie M .



Rys.1. Osiowosymetryczny kontakt skrętny – środkowa strefa przyczepności (stick) i pierścieniowa strefa poślizgów (slip)

¹Politechnika Świętokrzyska, Katedra Inżynierii Komunikacyjnej; 25-314 Kielce; Al. 1000-lecia Państwa Polskiego 7.
Tel: + 48 41 34-24-558, E-mail: a.brzoza@tu.kielce.pl

Moment M powoduje w półprzestrzeni stan czystego skręcania opisany jednym niezerowym przemieszczeniem w kierunku kątowym $u_\varphi(r, z)$, co powoduje dwie niezerowe składowe tensora naprężeń $\tau_{r\varphi}(r, z)$ i $\tau_{z\varphi}(r, z)$, opisane równaniem równowagi [3]

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\varphi} = 0 \quad (1)$$

Relacje pomiędzy składowymi tensora naprężeń, a przemieszczeniem kątowym daje prawo Hooke'a

$$\tau_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad \tau_{z\varphi} = \mu \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \quad (2)$$

gdzie: μ jest modułem ścinania materiału półprzestrzeni.

Wstawiając (2) do (1) otrzymujemy inną postać równania równowagi na przemieszczenia

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

Równanie (3) należy rozwiązać przy następującym warunku brzegowym

$$\tau_{z\varphi}(r, 0) = q(r), \quad 0 \leq r \leq a \quad (4)$$

gdzie: $q(r)$ oznacza jeszcze nieznaną nacisk kątowy powstały w strefie styku w wyniku przyłożenia momentu obrotowego.

Do rozwiązania zagadnienia brzegowego (3), (4) stosujemy transformację całkową Hankela [5] poprzez wzory

$$\bar{u}_\varphi(t, z) = \int_0^\infty u_\varphi(r, z) r J_1(rt) dr \quad (5)$$

$$u_\varphi(r, z) = \int_0^\infty \bar{u}_\varphi(t, z) t J_1(rt) dt \quad (6)$$

Tutaj $J_1(rt)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju pierwszego rzędu, zaś t parametrem transformacji. Stosując tą transformację do równania (3) otrzymujemy równanie różniczkowe względem transformaty przemieszczeń

$$\frac{d^2 \bar{u}_\varphi}{dt^2} - t^2 \bar{u}_\varphi = 0 \quad (7)$$

Jego rozwiązanie łatwo wyznaczyć w postaci

$$\bar{u}_\varphi(t, z) = A(t)e^{-tz} + Be^{tz} \quad (8)$$

Z ograniczoności tego rozwiązania dla $z \rightarrow \infty$ wynika, że stała $B = 0$ i należy wyznaczyć stałą $A(t)$.

Warunek brzegowy (4) w przestrzeni transformacji z uwzględnieniem prawa Hooke'a (2) ma postać

$$\mu \frac{d\bar{u}_\varphi}{dz} = q(t) \quad (9)$$

gdzie transformacja Hankela

$$\bar{q}(t) = \int_0^\infty q(r) r J_1(rt) dr \quad (10)$$

jest transformatą obciążeń kątowych i z (8) i (9) łatwo wyznaczyć

$$A(t) = -\frac{1}{\mu \cdot t} \bar{q}(t)$$

Wtedy na brzegu półprzestrzeni mamy transformatę przemieszczeń

$$\bar{u}_\varphi(t, 0) = -\frac{1}{\mu \cdot t} \bar{q}(t) = -\frac{1}{\mu \cdot t} \int_0^\infty q(\rho) \rho J_1(t\rho) d\rho \quad (11)$$

Stosując odwrotną transformację (6) otrzymujemy

$$u_\varphi(r, 0) = \int_0^a \bar{u}_\varphi(t, 0) t J_1(rt) dt = -\frac{1}{\mu} \int_0^a \bar{q}(t) J_1(rt) dt = -\frac{1}{\mu} \int_0^a q(\rho) \left\{ \int_0^\infty J_1(\rho t) J_1(rt) dt \right\} \rho d\rho \quad (12)$$

Dla uzyskania ogólnego rozwiązania zagadnienia wyprowadzamy dogodną prezentację dla przemieszczeń i nacisków kątowych. W tym celu do przedstawień Hankela dla przemieszczeń i nacisków kątowych

$$u_\varphi(r, 0) = -\frac{1}{\mu} \int_0^\infty \bar{q}(\rho) J_1(r\rho) d\rho \quad (13)$$

$$\tau_{z\varphi}(r, 0) = q(r) = \int_0^\infty \bar{q}(\rho) \rho J_1(r\rho) d\rho \quad (14)$$

wprowadzamy nową niewiadomą funkcję $\varphi(t)$ wzorem

$$\bar{q}(\rho) = \int_0^\infty \varphi(t) \sin(t\rho) dt \quad (15)$$

Podstawiając (15) do (14) i biorąc pod uwagę [6]

$$\rho J_1(\rho r) = -\frac{d}{dr} J_0(\rho r)$$

mamy

$$\tau_{z\varphi}(r, 0) = q(r) = \int_0^a \varphi(t) \left\{ \int_0^\infty \rho J_1(\rho r) \sin(t\rho) d\rho \right\} dt = -\frac{d}{dr} \int_0^a \varphi(t) \left\{ \int_0^\infty J_0(\rho r) \sin(t\rho) d\rho \right\} dt \quad (16)$$

oraz wykorzystując całkę tablicową [7]

$$\int_0^\infty J_0(\rho r) \sin(t\rho) d\rho = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}}, & r < t \\ 0, & r > t \end{cases}$$

otrzymujemy formułę na funkcję nacisków kątowych

$$\tau_{z\varphi}(r, 0) = q(r) = \begin{cases} -\frac{d}{dr} \int_r^a \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt, & 0 \leq r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (17)$$

Podobnie wstawiając (15) do (13) mamy

$$u_\varphi(r, 0) = -\frac{1}{\mu} \int_0^a \varphi(t) \left\{ \int_0^\infty J_1(\rho r) \sin(t\rho) d\rho \right\} dt \quad (18)$$

i uwzględniając całkę tablicową [7]

$$\int_0^\infty J_1(\rho r) \sin(t\rho) d\rho = \begin{cases} \frac{t}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}}, & t < r \\ 0, & t > r \end{cases}$$

otrzymujemy wzór na przemieszczenie kątowne brzegu półprzestrzeni

$$u_{\varphi}(r, 0) = \begin{cases} -\frac{1}{\mu \cdot r} \int_0^r \frac{t\varphi(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt, & r \leq a \\ -\frac{1}{\mu \cdot r} \int_0^a \frac{t\varphi(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt, & r > a \end{cases} \quad (19)$$

Przedstawienia (17) i (19) wykorzystamy do spełnienia warunków styku dla zagadnienia skręcania w przypadku całkowitej przyczepności.

Przyjmujemy warunki brzegowe w przypadku całkowitej przyczepności

$$u_{\varphi}(r, 0) = \kappa \cdot r, \quad 0 \leq r \leq a \quad (20)$$

$$\tau_{z\varphi}(r, 0) = 0, \quad r > a \quad (21)$$

gdzie: κ jest kątem skręcania.

Łatwo zauważyć, że wzór (17) spełnia automatycznie warunek brzegowy (21). Spełnienie warunku (20) przy pomocy przedstawienia (19) prowadzi do równania

$$\int_0^r \frac{t\varphi(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt = -\mu\kappa \cdot r^2, \quad 0 \leq r \leq a \quad (22)$$

Jest to równanie typu Abela [5] względem niewiadomej funkcji $\varphi(t)$. Stosując oznaczenia z [5] możemy to równanie zapisać w postaci operatorowej

$$A_1[t\varphi(t); r] \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \frac{t\varphi(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu\kappa \cdot r^2, \quad 0 \leq r \leq a \quad (23)$$

Stosując odwrotny operator Abela [5] do równania (23) i po przekształceniach

$$\begin{aligned} r \cdot \varphi(r) &= A_1^{-1} \left[-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu\kappa \cdot t^2; r \right] = r \cdot A_1 \left[\frac{d}{dt} \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu\kappa \cdot t^2 \right); r \right] = \\ &= -2\mu\kappa \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot r \cdot A_1[t; r] = -2\mu\kappa \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot r \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \frac{tdt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \\ &= -2\mu\kappa \frac{2}{\pi} \cdot r \left[-\sqrt{r^2 - t^2} \right]_{t=0}^{t=r} = -\frac{4}{\pi} \mu\kappa \cdot r^2 \end{aligned}$$

otrzymujemy funkcję $\varphi(r)$ w postaci

$$\varphi(r) = -\frac{4}{\pi} \mu\kappa \cdot r \quad (24)$$

Naciski kątowne mogą być teraz policzone podstawiając (24) do (17) w postaci

$$\begin{aligned} q(r) &= -\frac{d}{dr} \int_r^a \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt = \frac{4}{\pi} \mu\kappa \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \\ &= \frac{4}{\pi} \mu\kappa \frac{d}{dr} \left[\sqrt{t^2 - r^2} \right]_{t=r}^{t=a} = \frac{4}{\pi} \mu\kappa \frac{d}{dr} \sqrt{a^2 - r^2} = \\ &= \frac{4}{\pi} \mu\kappa \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad 0 \leq r \leq a \end{aligned} \quad (25)$$

Ta funkcja opisuje rozkład nacisków stycznych w zagadnieniu kontaktu skrętnego w warunkach doskonałej przyczepności. To samo rozwiązanie uzyskane inną drogą przytacza Lubkin w swojej pracy [2].

Przejdźmy teraz do analizy uzyskanego rozwiązania (25).

Widać, że wzrasta ono do nieskończoności dla $r \rightarrow a$. Z drugiej strony uzyskany rozkład nacisków kątowych w żaden sposób nie zależy od funkcji nacisków normalnych. Sprawdźmy zatem kiedy może być naruszony warunek doskonałej przyczepności

$$q(r) < f \cdot p(r) \quad (26)$$

gdzie: f jest współczynnikiem tarcia kinematycznego.

W tym celu zbadajmy stosunek $q(r)/p(r)$. Tutaj funkcja nacisków normalnych $p(r)$ nie została jeszcze sprecyzowana i uważamy, że ma ona dość ogólną postać. Jednak mając rozwiązanie (25) można już teraz podać następujące wnioski

1. Jeśli nacisk kontaktowy spełnia warunek $p(a) < \infty$, to warunek (26) zostaje naruszony dla każdego ograniczonego współczynnika tarcia f . Oznacza to istnienie pierścieniowej strefy częściowych poślizgów, tak jak to ma miejsce w zagadnieniu Lubkina.
2. Warunek (26) jest spełniony w punkcie środkowym $r = 0$, jeżeli tylko nacisk normalny spełnia warunek $p(a) > 0$. Oznacza to brak odspojenia stempla i półprzestrzeni, które mogłyby wystąpić w pewnych okolicznościach.
3. Nie mogą powstawać częściowe poślizgi, jeżeli tylko jest spełniony warunek $\lim_{r \rightarrow a} p(r) = \infty$. Taka sytuacja ma miejsce w przypadku płaskiego stempla o ostrych krawędziach [9].

W dalszej części uważamy, iż zachodzą warunki omówione w niniejszym punkcie i będziemy rozważać powstawanie częściowych poślizgów w pierścieniowym pasie.

2.2 Zagadnienie skręcania – częściowe poślizgi

Zakładamy, że naciski normalne spełniają warunki omówione w poprzednim punkcie, przy których w zagadnieniu kontaktu skrętnego we wspólnej strefie styku powstają poślizgi. Uważamy, że środkowa część strefy styku znajduje się w warunkach całkowitej przyczepności, podczas gdy na zewnętrznym pierścieniu tej strefy powstają poślizgi (rys.1).

Warunki brzegowe rozważonego problemu są, odpowiednio w strefie przyczepności i w strefie poślizgów, następujące

$$u_\varphi(r, 0) = \kappa r, \quad 0 < r \leq c \quad (20a)$$

$$q(r) < fp(r), \quad 0 < r \leq c \quad (20b)$$

$$u_\varphi(r, 0) > 0, \quad c < r < a \quad (20c)$$

$$q(r) = fp(r), \quad c < r < a \quad (20d)$$

gdzie: $\kappa = \text{const}$ jest danym kątem obrotu sztywnego stempla, a promień obszaru przyczepności c jest niewiadomy.

Z matematycznego punktu widzenia tak sformułowane zagadnienie sprowadza się do rozwiązania równania równowagi (3) przy warunkach brzegowych (20a-d). W punkcie 2.1 otrzymano kątowe przemieszczenia górnego brzegu półprzestrzeni w postaci (12)

$$u_\varphi(r, 0) = -\frac{1}{\mu} \int_0^a tq(t) \left\{ \int_0^\infty J_1(\rho t) J_1(\rho r) d\rho \right\} dt \quad (21a)$$

Zaznaczmy, że naciski kątowe $q(t)$ są na razie niewiadome. Przyjmujemy je w postaci następującej superpozycji

$$q(r) = fp(r) + \begin{cases} q_0(r), & 0 \leq r \leq c \leq a \\ 0, & c \leq r \leq a \end{cases} \quad (21b)$$

gdzie: $p(r)$ uważa się za znane naciski normalne, zaś $q_0(r)$ jest nową niewiadomą, zwaną funkcją nacisków korygujących.

Zauważmy, że przyjęcie formuły (21b) dla rozkładu nacisków kątowych spełnia automatycznie warunki brzegowe (20b) i (20d), jeżeli tylko funkcja nacisków korygujących jest ujemna. Wstawiając teraz (21b) do (21a) uzyskamy

$$u_\varphi(r, 0) = -\frac{f}{\mu} \int_0^a tp(t) \left\{ \int_0^\infty J_1(\rho t) J_1(\rho r) d\rho \right\} dt - \frac{1}{\mu} \int_0^c tq_0(t) \left\{ \int_0^\infty J_1(\rho t) J_1(\rho r) d\rho \right\} dt \quad (21c)$$

lub oznaczając

$$R_1(r) \equiv \int_0^a tp(t) \left\{ \int_0^\infty J_1(\rho t) J_1(\rho r) d\rho \right\} dt \quad (21d)$$

uzyskujemy prostszą postać przemieszczenia

$$u_{\varphi}(r, 0) = -\frac{1}{\mu} \int_0^c tq_0(t) \left\{ \int_0^{\infty} J_1(\rho t) J_1(\rho r) d\rho \right\} dt - \frac{f}{\mu} R_1(r) \quad (22)$$

Wprowadzając wzory na transformację Hankela [5] dla funkcji korygującej $q_0(r)$ wzorami

$$\bar{q}_0(\rho) = \int_0^c tq_0(t) J_1(\rho t) dt, \quad \rho \geq 0 \quad \text{i} \quad \begin{cases} q_0(r) = \int_0^{\infty} \rho \bar{q}_0(\rho) J_1(\rho r) d\rho, & 0 \leq r \leq c, \\ q_0(r) = 0, & r > c \end{cases} \quad (23a)$$

$$(23b)$$

ze wzoru (22) otrzymujemy następującą postać przemieszczenia

$$u_{\varphi}(r, 0) = -\frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \bar{q}_0(\rho) J_1(\rho r) d\rho - \frac{f}{\mu} R_1(r) \quad (23c)$$

Wstawiając następnie superpozycję (21b) do wzoru na funkcję nacisków kątowych (14) otrzymujemy

$$\tau_{z\varphi}(r, 0) = q(r) = f \int_0^a tp(t) \left\{ \int_0^{\infty} \rho J_1(\rho t) J_1(\rho r) d\rho \right\} dt + \int_0^c tq_0(t) \left\{ \int_0^{\infty} \rho J_1(\rho t) J_1(\rho r) d\rho \right\} dt \quad (24a)$$

i uwzględniając w (24a) wzory transformacji Hankela na funkcję nacisków normalnych

$$\bar{p}(\rho) = \int_0^a tp(t) J_1(\rho t) dt \quad \text{i} \quad p(r) = \int_0^{\infty} \rho \bar{p}(\rho) J_1(\rho r) d\rho \quad (24b)$$

$$(24c)$$

mamy ostateczny wzór na naciski kątowe

$$\tau_{z\varphi}(r, 0) = q(r) = \int_0^{\infty} \rho \bar{q}_0(\rho) J_1(\rho r) d\rho + fp(r), \quad 0 \leq r \leq a \quad (25)$$

Uzyskane powyżej dwa ważne wzory – na przemieszczenie (23c) i naciski kątowe (25) – przekształcamy postulując niewiadomą funkcję $q_0(r)$ wzorem

$$\bar{q}_0(\rho) = \int_0^c \varphi_0(t) \sin(t\rho) dt, \quad \rho \geq 0 \quad (26)$$

gdzie: $\varphi_0(t)$ jest nową niewiadomą określoną w strefie przyczepności.

Podstawiając otrzymany wzór (26) do formuły (25) i uwzględniając zależności tablicowe [7]

$$\rho J_1(\rho r) = -\frac{d}{dr} J_0(\rho r) \quad \text{i} \quad \int_0^{\infty} J_0(\rho r) \sin(t\rho) d\rho = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}}, & r < t \\ 0, & r > t \end{cases}$$

otrzymamy po pewnych nieskomplikowanych przekształceniach

$$q(r) = \int_0^c \varphi_0(t) \left\{ \int_0^{\infty} \rho J_1(\rho r) \sin(t\rho) d\rho \right\} dt + fp(r) = -\frac{d}{dr} \int_0^c \varphi_0(t) \left\{ \int_0^{\infty} J_0(\rho r) \sin(t\rho) d\rho \right\} dt + fp(r) =$$

$$= -\frac{d}{dr} \left[\int_0^{\infty} \varphi_0(t) \cdot 0 dt \right]_{t < r} - \frac{d}{dr} \left[\int_0^{\infty} \varphi_0(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt \right]_{t > r} + fp(r), \quad r > 0 \quad (27)$$

oraz uwzględniając $c < r < a \Rightarrow r > c > t$ oraz $r > a \Rightarrow r > t$ otrzymujemy nową postać dla funkcji nacisków kątowych

$$q(r) = fp(r) - \begin{cases} \frac{d}{dr} \int_r^c \frac{\varphi_0(t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt, & 0 \leq r \leq c < a \\ 0, & r > c \end{cases} \quad (28)$$

Następnie do wzoru na przemieszczenie (23c) wstawiamy (26) i uwzględniając całkę tablicową [7]

$$\int_0^\infty J_1(\rho r) \sin(t\rho) d\rho = \begin{cases} \frac{t}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}}, & t < r \\ 0, & t > r \end{cases}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_\varphi(r,0) &= -\frac{1}{\mu} \int_0^c \varphi_0(t) \left\{ \int_0^\infty \rho J_1(\rho r) \sin(t\rho) d\rho \right\} dt - \frac{f}{\mu} R_1(r) = \\ &= -\frac{f}{\mu} R_1(r) - \frac{1}{\mu} \left\{ \left[\int_0^r \varphi_0(t) \frac{t}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt \right]_{t < r} + \left[\int_r^c \varphi_0(t) \cdot 0 dt \right]_{t > r} \right\} = \\ &= -\frac{f}{\mu} R_1(r) - \frac{1}{\mu} \left[\int_0^r \varphi_0(t) \frac{t}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt \right]_{t < r}, \quad r > c > t \end{aligned} \quad (29)$$

skąd mamy przemieszczenie kątowe

$$u_\varphi(r,0) = -\frac{f}{\mu} R_1(r) - \frac{1}{\mu r} \begin{cases} \int_0^r \frac{t\varphi_0(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt, & 0 \leq r \leq c < a \\ \int_0^c \frac{t\varphi_0(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt, & r > c \end{cases} \quad (30)$$

Zwróćmy uwagę na to, że funkcja $\varphi_0(t)$ w wyrażeniach (28), (30) jest nadal niewiadoma. Dla jej określenia posłużymy warunkom brzegowym (20a). Spełniając warunek brzegowy w strefie przyczepności (20a) przy wykorzystaniu wyrażenia (30) uzyskujemy równanie

$$\int_0^r \frac{t\varphi_0(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt = -\mu\kappa r^2 - frR_1(r), \quad 0 < r < c \quad (31)$$

Jest to równanie Abela względem funkcji $\varphi_0(t)$, które można zapisać w postaci operatorowej

$$A_1[t\varphi_0(t); r] \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \frac{t\varphi_0(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu\kappa r^2 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} frR_1(r), \quad 0 < r < c \quad (32)$$

W celu rozwiązania równania (32), stosujemy operator odwrotny A_1^{-1} do tego równania i wówczas otrzymujemy

$$\begin{aligned} r\varphi_0(r) &= -\frac{4}{\pi} \mu\kappa r^2 - A_1^{-1} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} fr \cdot R_1(t); r \right] = -\frac{4}{\pi} \mu\kappa r^2 - A_1 \left[\frac{d}{dt} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} fr \cdot R_1(t) \right); r \right] = \\ &= -\frac{4}{\pi} \mu\kappa r^2 - \frac{2}{\pi} fr \int_0^r \frac{R_1(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt - \frac{2}{\pi} fr \int_0^r \frac{tR_1'(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt \end{aligned} \quad (33a)$$

i obliczając pochodną funkcji R_1 daną wzorem (21d)

$$R_1'(t) = \int_0^a s \cdot p(s) \left(\int_0^\infty J_1(\rho s) J_1'(\rho t) d\rho \right) ds$$

oraz biorąc pod uwagę wzór na pochodną funkcji Bessela [7]

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} [J_1(z)] = \rho J_0(z) - \rho \frac{1}{z} J_1(z) = \rho J_0(\rho t) - \frac{1}{t} J_1(\rho t)$$

otrzymujemy

$$r\varphi_0(r) = -\frac{4}{\pi} \mu \kappa r^2 - \frac{2}{\pi} f r \int_0^a s \cdot p(s) \left[\int_0^\infty J_1(\rho s) \left(\int_0^r \frac{\rho t J_0(\rho t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt \right) d\rho \right] ds \quad (33b)$$

Następnie biorąc pod uwagę całki [7]

$$\int_0^r \frac{\rho t J_0(\rho t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt = \sin(r\rho) \quad \text{ i } \quad \int_0^\infty J_1(\rho s) \sin(\rho r) d\rho = \begin{cases} 0, & r > s \\ \frac{r}{s} \frac{1}{\sqrt{s^2 - r^2}}, & 0 < r < s \end{cases}$$

otrzymujemy ostateczną postać szukanej funkcji $\varphi_0(r)$, która jest rozwiązaniem równania Abela (32)

$$\varphi_0(r) = -\frac{4}{\pi} \mu \kappa r - \frac{2}{\pi} f r \int_r^a \frac{p(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds, \quad 0 \leq r \leq c \quad (34)$$

Jak widać funkcja $\varphi_0(r)$ zależy poprzez formułę (34) od nacisków kontaktowych $p(r)$. Zwróćmy jeszcze raz uwagę na to, że te naciski są na razie dowolną funkcją spełniającą warunek $p(a) < \infty$. W takim sensie wzór (34) daje ogólne rozwiązanie zagadnienia kontaktu skręcającego przy uwzględnieniu częściowych poślizgów.

Znając funkcję $\varphi_0(r)$ ze wzorów (28) i (30) można wyznaczyć przemieszczenia i naciski kątowe w strefie styku ciał.

W dalszej części pokażemy, że jeżeli zagadnienie kontaktu normalnego można opisać w ramach modelu Hertza, to całkę we wzorze (34) można policzyć w sposób jawny i jako przypadek szczególny uzyskać rozwiązanie Lubkina.

Wprowadzając parametry bezwymiarowe

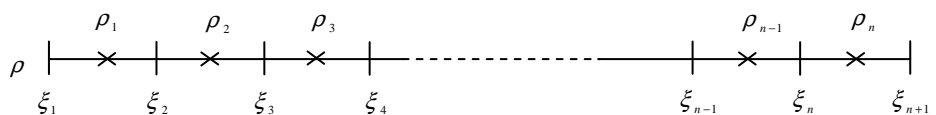
$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \xi = \frac{s}{a}, \quad p^*(\xi) = \frac{a^2}{P} p(s), \quad \kappa^* = \frac{\mu a^2}{fP} \kappa, \quad \varphi_0^*(\rho) = \frac{a}{fP} \varphi_0(r) \quad (35)$$

wzór (34) uzyskuje postać

$$\varphi_0^*(\rho) = -\frac{4}{\pi} \rho \kappa^* - \frac{2}{\pi} \rho \int_\rho^1 \frac{p^*(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \rho^2}} d\xi \quad (36a)$$

Do obliczenia całki zawierającej dowolną funkcję $p^*(\xi)$ użyjemy metody numerycznego całkowania. W tym celu wprowadzamy, przedstawiony na rys.2, następujący podział przedziału całkowania

$$\begin{aligned} \xi_i &= \rho + (i-1)\Delta\rho, & i &= 1, 2, \dots, n+1 \\ \rho_k &= \rho + (k-0,5)\Delta\rho, & k &= 1, 2, \dots, n+1 \end{aligned} \quad (36b)$$



Rys.2. Podział odcinka na n części punktami ξ_i i ρ_k

Wtedy używając metody prostokątów otrzymamy odpowiednik numerycznej formuły (36a)

$$\varphi_0^*(\rho) = -\frac{4}{\pi} \rho \kappa^* - \frac{2}{\pi} \rho \sum_{i=1}^n \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{p^*(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \rho^2}} d\xi = -\frac{4}{\pi} \rho \kappa^* - \frac{2}{\pi} \rho \sum_{i=1}^n p^*(\rho_i) A_i^{(1)}(\rho) \quad (36c)$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$A_i^{(1)} = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - \rho^2}} = \left[\ln \left| \frac{\xi}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{\xi}{\rho}\right)^2 - 1} \right| \right]_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} = \ln \left| \frac{\xi_{i+1} + \sqrt{\xi_{i+1}^2 - \rho^2}}{\xi_i + \sqrt{\xi_i^2 - \rho^2}} \right| \quad (36d)$$

Wprowadzamy teraz warunek dla określenia punktu c , rozgraniczający strefy przyczepności i poślizgów. Z postaci superpozycji (21b) wynika, że dla ciągłości funkcji nacisków kątowych w strefie styku należy spełnić warunek fizyczny

$$q_0(c) = 0 \quad (37)$$

który, z uwzględnieniem w transformacji Hankela (23a,b), daje równanie

$$q_0(c) = \int_0^{\infty} \rho \bar{q}_0(\rho) J_1(\rho \cdot c) d\rho = 0 \quad (38)$$

Wstawiając (26) do (38) mamy

$$\int_0^c \varphi_0(t) \left\{ \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} J_1(\rho \cdot c) \cos(t\rho) d\rho \right\} dt = 0 \quad (38b)$$

Korzystając ze wzorów [6]

$$\int_0^{\infty} J_1(\rho \cdot c) \cos(t\rho) d\rho = \frac{1}{c} \cdot \frac{tH(t-c)}{c\sqrt{t^2-c^2}} = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2-c^2}} H(t-c) \right) \quad \text{ i } \quad \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} J_1(\rho \cdot c) \cos(t\rho) d\rho = \delta(t-c) \quad (38c)$$

gdzie: $H(t-c)$ jest funkcją Heaviside'a, a $\delta(\cdot)$ oznacza funkcję Diraca, otrzymujemy

$$\int_0^c \varphi_0(t) \delta(t-c) dt = 0 \quad (38d)$$

lub, biorąc pod uwagę własności funkcji Diraca, mamy ostatecznie $\varphi_0(c) = 0$.

Spełnienie tego warunku z uwzględnieniem rozwiązania (34) prowadzi do równania

$$\varphi_0(c) = -\frac{4}{\pi} \mu \kappa c - \frac{2}{\pi} f c \int_c^a \frac{p(s)}{\sqrt{s^2 - c^2}} ds = 0 \quad (38e)$$

lub ostatecznie

$$\kappa = -\frac{f}{2\mu} \int_c^a \frac{p(s)}{\sqrt{s^2 - c^2}} ds \quad (39)$$

Znając rozkład normalny $p(r)$ wzór (39) jest relacją między kątem skręcania κ i promieniem strefy przyczepności c . Kolejną ważną zależność pomiędzy momentem obrotowym M , a kątem skręcania κ uzyskamy z warunku równowagi

$$M = 2\pi \int_0^a r^2 q(r) dr \quad (39a)$$

Wstawiając do tego wzoru formułę (28) i całkując przez części, a następnie wstawiając wzór na φ_0 zgodnie z (34) otrzymujemy po prostych przekształceniach zależność pomiędzy momentem skrętnym, a naciskiem normalnym

$$M = 2\pi \int_0^a r^2 p(r) dr - \frac{32}{3} \mu \kappa c^3 - 8f \int_0^c r \int_r^c \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_t^a \frac{p(s)}{\sqrt{s^2 - t^2}} ds dt dr \quad (39b)$$

W taki sposób rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia sprowadza się do wzorów (28), (30), (34), (39), (39b) i jest zależne od funkcji $p(r)$ wyrażającej naciski normalne. Poniżej te wzory zostaną wykorzystane do rozwiązywania nowych zagadnień kontaktu skrętnego z uwzględnieniem częściowych poślizgów.

W tym miejscu otrzymamy rozwiązanie zagadnienia Lubkina [2] dla styku skrętnego dwóch kul, jako przypadek szczególny naszej teorii. W tym celu wstawiamy znany rozkład Hertza [1]

$$p(r) = -\frac{3P}{2\pi a} \sqrt{a^2 - r^2} \quad (40)$$

do wzoru (38e) i otrzymujemy

$$\int_c^a \frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{\sqrt{s^2 - c^2}} ds = \frac{4\mu\kappa\pi a}{3fP} \quad (41)$$

Biorąc pod uwagę całkę [7]

$$\int_c^a \frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{\sqrt{s^2 - c^2}} ds = a[\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k)], \quad k = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2} \quad (42)$$

gdzie: $\mathbf{K}(k)$ i $\mathbf{E}(k)$ są zupełnymi całkami eliptycznymi pierwszego i drugiego rodzaju, oraz oznaczając

$$D(x) = \frac{1}{k^2} (\mathbf{K}(x) - \mathbf{E}(x))$$

ostatecznie otrzymujemy

$$\kappa^* \equiv \frac{\mu a^2}{fP} \kappa = \frac{3}{4\pi} k^2 D(k) \quad (43)$$

Wzór (43) odpowiada znanej zależności między znormalizowanym kątem skręcania i wielkością strefy przyczepności w zagadnieniu Lubkina [2]. Jak widać otrzymano ją w drodze przejścia od ogólnej teorii do przypadku szczególnego.

3. WNIOSKI

W referacie przedstawiono uogólnioną teorię kontaktu skrętnego ciał z uwzględnieniem częściowych poślizgów. Pokazano warunki na rozkład nacisków kontaktowych, przy których częściowy poślizg jest nieunikniony. Otrzymano rozwiązanie zagadnienia w postaci ogólnych wzorów. Znane rozwiązanie Lubkina dla styku skrętnego dwóch kul otrzymano jako przypadek szczególny ogólnego rozwiązania.

4. BIBLIOGRAFIA

- [1] Hertz H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 92, pp.156–171, 1881.
- [2] Lubkin J.L.: *The torsion of elastic spheres in contact*, ASME J. Appl. Mech., 18, 183–187, 1951.
- [3] Nowacki W.: *Teoria sprężystości*, Warszawa, PWN 1970.
- [4] Johnson K.L.: *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, UK, 1985.
- [5] Sneddon I.N.: *Fourier transforms*, McGraw-Hill Book Company, New York 1951.
- [6] Abramowitz M., Stegun I.: *Handbook of Mathematical Functions*, New York, Dover Publications 1970.
- [7] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.: *Table of integrals, series, and products*, San Diego: Academic Press, cop. 2000.
- [8] Jäger J.: *Axi-symmetric bodies of equal material in contact under torsion or shift*, Archive of Applied Mechanics, 65, 478–487, 1995.
- [9] Brzoza A., Pauk V.: *Torsion of rough elastic half-space by rigid punch*, Archive of Applied Mechanics, Volume 78, pp. 531-542, Number 7 / July, Springer 2008.