

Leszek KIELSKI¹

SZTYWNOŚĆ PRĘTÓW I UKŁADÓW PRĘTOWYCH

W pracy przedstawiono analizę sztywności prętów i prostych konstrukcji prętowych. Sztywności wyznaczano w sposób ścisły, analitycznie. Analizowano przykłady pojedynczego pręta o różnych warunkach brzegowych, z uwzględnieniem imperfekcji, geometrii pręta i imperfekcji przyłożonego obciążenia, dla obciążeń w zakresie sprężystym. Analizowano sztywność ramy portalowej, której pionowe pręty zamocowane są na sztywno. Z przeprowadzonej analizy wynika, że sztywność konstrukcji jest wielkością zmienną i maleje w procesie jej obciążania. Najmniejszą sztywność, do której zmierza asymptotycznie, osiąga dla obciążenia zbliżonego do krytycznego.

RODS AND RIGIDITY ROD SYSTEMS

The paper presents an analysis of the stiffness of rods and rod design simple. Stiffness was determined strictly, analytically. Analyzed examples of a single rod with different boundary conditions, taking into account the imperfections, the geometry of the bar and the imperfection of the applied load, for loads of elastic. Portal frame stiffness was analyzed, the vertical bars are fixed rigidly. The analysis shows that the rigidity of the structure is variable size and decreases in the process of exposure. The lowest stiffness, which tends asymptotically, reaching for the load close to critical.

1. WSTĘP

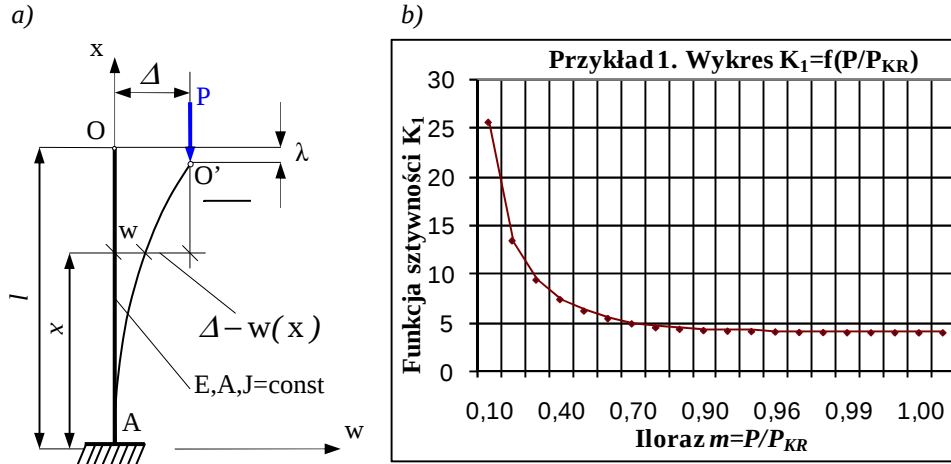
W pracy wykorzystano rozwiązania analityczne dla odkształconej osi prętów i prostych układów, dostępne w literaturze. Znając równania odkształconej osi wyznaczano sztywności wzdłużne (osiowe) tych konstrukcji. Wprowadzono bezwymiarową wielkość K , nazwaną funkcją sztywności oraz iloraz $m=P/P_{KR}$ reprezentujący obciążenie zewnętrzne. Wyniki analizowanych przykładów przedstawiano na wykresach $K=K(m)$.

2. PRZYKŁADY

2.1. Przykład 1

Wyznamy sztywność pręta utwierdzonego w przekroju A, w przekroju O obciążonego siłą osiową P (rys.1a)

¹Politechnika Radomska, Wydział Mechaniczny, 26-600 Radom, ul. Krasickiego 54,
WSEiZ, Wydział Architektury, 02-061 Warszawa, ul. Wawelska 14.



Rys.1. a) Pręt utwierdzony, obciążony siłą osiową przyłożoną do końca swobodnego,
b) Sztywność pręta K_1 w funkcji P/P_{KR} .

Wyznaczamy przemieszczenie pionowe λ końca pręta.

$$\lambda = \Delta^2 \left(\frac{1}{4} \alpha^2 l - \frac{1}{8} \alpha \sin 2\alpha l \right) \quad (1)$$

Wprowadzamy podstawienia:

$$u_1 = \frac{\alpha l}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}} \rightarrow \alpha = \frac{2u_1}{l}; \quad m = \frac{P}{P_{KR}}; \quad P_{KR} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}; \rightarrow m = \frac{16u_1^2}{\pi^2}; \quad P = \frac{4u_1^2 EJ}{l^2}; \quad (2)$$

Sztywność pręta k [N/m]:

$$k = \frac{P}{\lambda} = \frac{EJ}{\Delta^2 l} \cdot \frac{16u_1}{4u_1 - \sin 4u_1} = \frac{EJ}{\Delta^2 l} \cdot K_1 \quad (3)$$

Gdzie: K_1 - bezwymiarowa wielkość (nazwiemy ją funkcją sztywności)

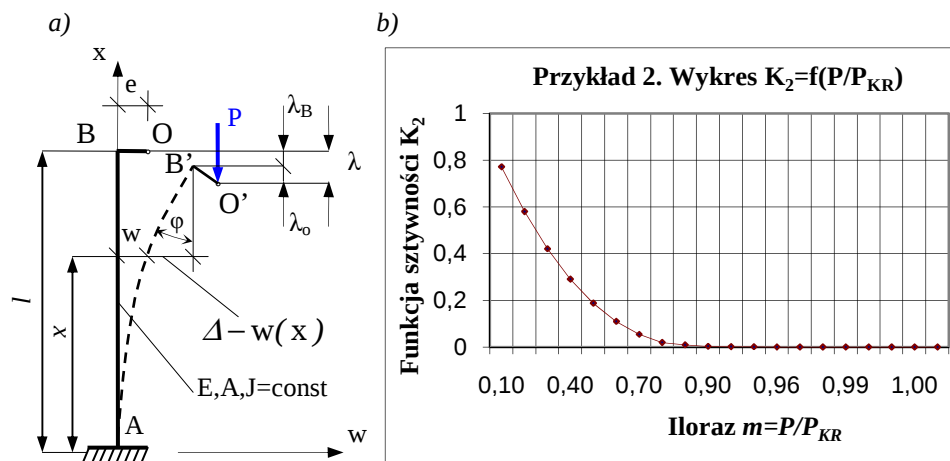
$$K_1 = \frac{16u_1}{4u_1 - \sin 4u_1} \quad (4)$$

Wykres $K=K(m)$ przedstawiono na rys 1b.

2.2. Przykład 2

Wyznamy sztywność pręta utwierzonego w przekroju A, w przekroju O obciążonego mimośrodowo przyłożoną siłą P (imperfekcja przyłożonego obciążenia), rys.2a. Jeżeli ograniczymy się do małych ugięć, otrzymamy następujące równanie [2] linii ugięcia:

$$w(x) = e \frac{1 - \cos \alpha x}{\cos \alpha x} \quad (5)$$



Rys.2. a) Pręt obciążony mimośrodową siłą, b) Sztywność pręta K_2 w funkcji P/P_{KR}

Obliczamy przemieszczenie osiowe punktu O przyłożenia siły P.

$$\lambda = \lambda_B + \lambda_0 \quad (6)$$

$$\text{gdzie: } \lambda_B = \frac{1}{2} \int_0^l w'^2 dx; \quad \lambda_0 = e \sin \varphi \approx e \cdot w'(l)$$

Wyznaczamy sztywność k.

$$k = \frac{P}{\lambda} = \frac{EJ}{e^2 l} \cdot \frac{12u_1 \cos^3 2u_1}{\sin^3 2u_1 + 3\sin 4u_1} = \frac{EJ}{e^2 l} \cdot K_2 \quad (7)$$

Funkcja sztywności pręta K_2 ,

$$K_2 = \frac{12u_1 \cos^3 2u_1}{\sin^3 2u_1 + 3\sin 4u_1} \quad (8)$$

Sztywność K_2 w funkcji ilorazu m przedstawiono na rys 2b.

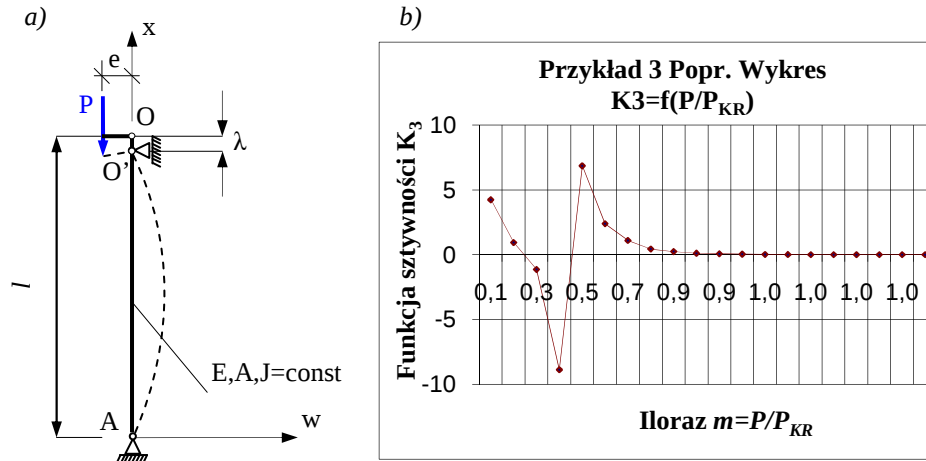
2.3. Przykład 3

Wyznamy sztywność pręta zamocowanego przegubowo na obu końcach, ściskanego mimośrodowo przyłożoną siłą P (rys.3a). Równanie linii ugięcia osi pręta możemy przedstawić równaniem (9), [4].

$$w = \frac{e}{\sin 2u_2} \cdot \sin \frac{2u_2}{l} x - \frac{e}{l} x \quad (9)$$

Wyznamy przemieszczenie λ

$$\lambda = OO' = \frac{e^2}{l} \left(\frac{u^2}{\sin^2 2u} + \frac{u}{2\operatorname{tg} 2u} - \frac{1}{2} \right) \quad (10)$$



Rys.3. a) Pręt zamocowany przegubowo na obu końcach, b) Sztywność pręta K_3 w funkcji P/P_{KR} .

Sztywność pręta:

$$k_3 = \frac{P}{\lambda} = \frac{EJ}{e^2 l} \cdot \frac{4u^2}{\frac{u^2}{\sin^2 2u} + \frac{u}{2\operatorname{tg} 2u} - \frac{1}{2}} = \frac{EJ}{e^2 l} \cdot K_3 \quad (11)$$

Funkcja sztywności pręta K_3 :

$$K_3 = \frac{4u^2}{\frac{u^2}{\sin^2 2u} + \frac{u}{2\operatorname{tg} 2u} - \frac{1}{2}} \quad (12)$$

Sztywność K_3 w funkcji ilorazu m przedstawiono na rys.3b.

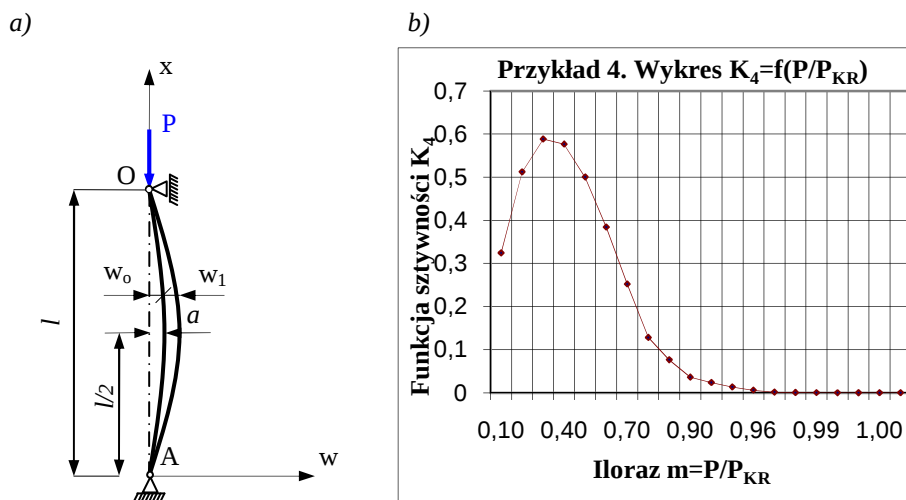
2.4. Przykład 4

Wyznamy sztywność pręta ze wstępną krzywizną (imperfekcja geometrii), zamocowanego przegubowo na obu końcach [4]. Linie ugięcia pręta przedstawia równanie (13):

$$w = w_o + w_1 = \frac{a}{1-m} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (13)$$

Wyznamy przemieszczenie osiowe punktu przyłożenia siły:

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l w'^2 dx = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{l} a^2 \frac{1}{(1-m)^2} \quad (14)$$



Rys.4. a) Pręt ze wstępną krzywizną zamocowany przegubowo na obu końcach,
b) Sztywność pręta K_4 w funkcji P/P_{KR} .

Wyznaczamy sztywność k_4 :

$$k_4 = \frac{P}{\lambda} = \frac{4EJ}{a^2 l} \cdot \frac{16}{\pi^2} u^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2} u^2 \right)^2 = \frac{4EJ}{a^2 l} \cdot K_4 \quad (15)$$

Gdzie funkcja sztywności pręta K_4 :

$$K_4 = \frac{16}{\pi^2} u^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2} u^2 \right)^2 \quad (16)$$

Sztywność K_4 w funkcji ilorazu m przedstawiono na rys.4a.

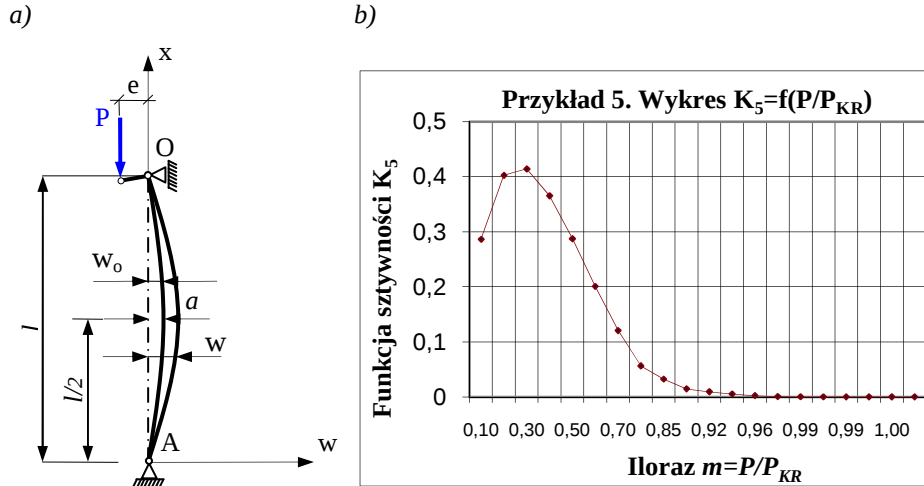
2.5. Przykład 5

Wyznamy sztywność pręta ze wstępną krzywizną, zamocowanego przegubowo na obu końcach, obciążonego mimośrodowo przyłożoną siłą rys.5a. Linia ugięcia wywołana działaniem mimośrodowo przyłożonej siły [4]:

$$w_e = e \left(\frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l} - \frac{x}{l} \right) \quad (17)$$

Linia ugięcia wynikająca ze wstępnej krzywizny

$$w_{w_0} = \frac{a}{1-m} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (18)$$



Rys.5. a) Pręt ze wstępną krzywizną utwierdzony przegubowo, obciążony mimośrodowo przyłożoną siłą, b) Sztywność pręta K_5 w funkcji P/P_{KR} .

Całkowite ugięcie

$$w = w_e + w_{w_0}$$

Wyznaczamy przemieszczenie osiowe punktu przyłożenia siły:

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l w'^2 dx = \frac{a^2}{1} \frac{\pi^6}{4(\pi^2 - 4u^2)} + \frac{e^2}{1} \frac{4u^2 \sin 4u}{4 \sin^2 2u} + \frac{ae}{1} \cdot \frac{4\pi^3 u^2}{(\pi^2 - 4u^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{e^2}{1} \quad (19)$$

Jeżeli założymy, że $e=a$, otrzymamy:

$$\lambda = \frac{e^2}{1} \left[\frac{\pi^6 + 16\pi^3 u^2}{4(\pi^2 - 4u^2)} + \frac{4u^2 + u \sin 4u}{4 \sin^2 2u} - \frac{1}{2} \right] \quad (20)$$

Sztywność pręta k_5

$$k_5 = \frac{P}{\lambda} = \frac{EJ}{e^2 l} \cdot \frac{16u^2}{\frac{\pi^3(\pi^3 + 16u^2)}{(\pi^2 - 4u^2)} + \frac{4u^2 + u \sin 4u}{\sin^2 2u} - 2} = \frac{EJ}{e^2 l} \cdot K_5 \quad (21)$$

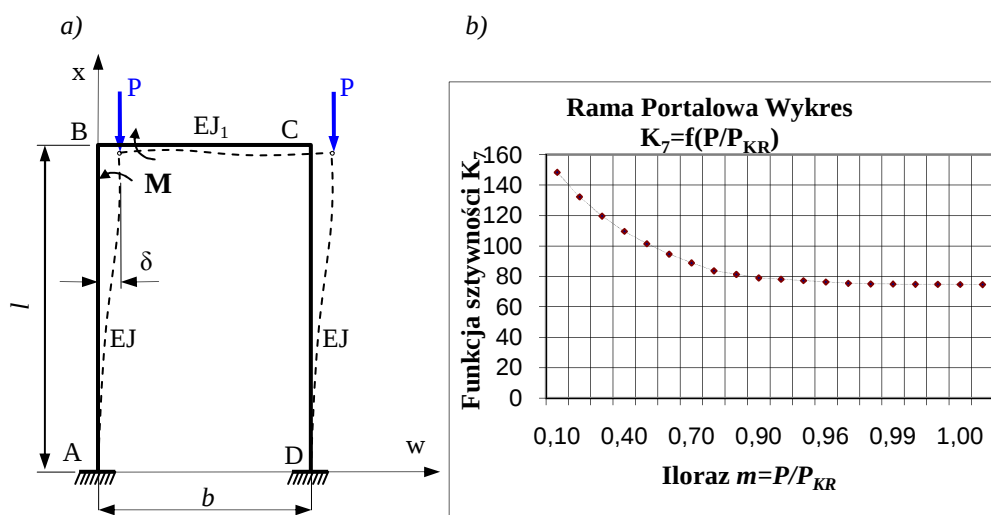
Gdzie funkcja sztywności pręta K_5 :

$$K_5 = \frac{16u^2}{\frac{\pi^3(\pi^3 + 16u^2)}{(\pi^2 - 4u^2)} + \frac{4u^2 + u \sin 4u}{\sin^2 2u} - 2} \quad (22)$$

Sztywność K_5 w funkcji ilorazu m przedstawiono na rys.5a.

2.6. Przykład 6

Wyznamy sztywność ramy Portalowej obciążonej siłami P i zamocowanej na sztywno w przekrojach A i D (rys.6a).



Rys.6. a) Rama portalowa utwierdzona na obu końcach, b) Sztywność pręta K_7 w funkcji P/P_{KR}

Równanie różniczkowe linii ugięcia słupa AB [4]:

$$EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = P(\delta - w) - M \quad (23)$$

wyznaczamy moment M

$$M = \frac{P\delta\alpha \sin \alpha l}{\alpha \sin \alpha l + \frac{Pb}{6EJ_1}} \quad (24)$$

Przemieszczenie pionowe punktu przyłożenia siły P (uwzględniając podstawienia 2):

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l w'^2 dx = \frac{\delta^2 \xi^2 u^4}{l(3\eta \sin 2u + u\xi)^2} \left(1 - \frac{\sin 4u}{4u} \right) \quad (25)$$

gdzie:

$$\frac{EJ_1}{EJ} = \eta; \quad \frac{b}{l} = \xi$$

Wyznamy sztywność pręta k_7 dla $\eta = 1$; $\frac{b}{l} = 0,5$

$$k_7 = \frac{P}{\lambda} = \frac{EJ}{e^2 l} \cdot \frac{4(3\sin 2u + 0,5u)^2}{u^2 \left(1 - \frac{\sin 4u}{4u}\right)} = \frac{EJ}{e^2 l} \cdot K_7 \quad (26)$$

Gdzie funkcja sztywności pręta K_5 :

$$K_7 = \frac{4(3\sin 2u + 0,5u)^2}{u^2 \left(1 - \frac{\sin 4u}{4u}\right)} \quad (27)$$

Sztywność K_7 w funkcji ilorazu m przedstawiono na rys.6b.

3. WNIOSKI

W niniejszej pracy badano sztywność wzdłużną smukłych konstrukcji prętowych w funkcji obciążenia zewnętrznego. Przedmiotem badań były pręty lub proste konstrukcje prętowe, dla których znane są z literatury równania odkształconej osi. Wykonano obliczenia sztywności dla sześciu przykładów. Dla prostego pręta ściskanego wzdłuż osi, przy różnych warunkach brzegowych oraz uwzględniając imperfekcję geometrii pręta oraz imperfekcję przyłożonego obciążenia. Dla wszystkich przykładów wyznaczono wykresy zależności „funkcji sztywności” K w funkcji obciążenia zewnętrznego $m = P/P_{KR}$. Z przebiegu wykresów wynika, że sztywność konstrukcji maleje ze wzrostem obciążenia, a swoją najmniejszą wartość osiąga dla obciążenia $P = P_{KR}$. Bardzo małą sztywność niektóre badane elementy osiągają już przy obciążeniu $0,6P_{KR}$. Można więc zaproponować doświadczalną metodę wyznaczania obciążenia krytycznego, polegającą na badaniu sztywności wzdłużnej konstrukcji, podczas jej obciążania, tworząc wykres $K = K(m)$. Badania można zakończyć dla $m = 0,6 \div 0,8$, co pozwoli aproksymować przebieg wykresu do $m = 1,0$ i wyznaczyć obciążenie krytyczne P_{KR} .

4. BIBLIOGRAFIA

- [1] Fung Y.C.: „Podstawy mechaniki ciała stałego”, Warszawa, PWN, 1969.
- [2] Gawęcki A.: *Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych*, Poznań, Wyd. Politechniki Poznańskiej, 1998.
- [3] Gutkowski W.: *Regularne konstrukcje prętowe*, Warszawa, PWN, 1973.
- [4] Timoshenko S.P., Gere J.M.: *Teoria stateczności sprężystej*, Warszawa, Arkady, 1963.
- [5] Misiak J.: *Stateczność konstrukcji prętowych*. Warszawa, PWN, 1990.
- [6] Życzkowski M.: *Podstawy analizy stateczności prętów sprężystych*, Cz. 1 w: *Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji*, Wrocław, Ossolineum, 1981.