Krzysztof SCHIFF[*]

ALTERNATYWNA METODA ROZWIĄZYWANIA KWADRATOWEGO ZAGADNIENIA PRZYDZIAŁU

Streszczenie

Kwadratowy problem przydziału polega na takim umieszczeniu fabryk (obiektów) w lokalizacjach, aby całkowity koszt wyrażony jako suma iloczynów odległości między obiektami i strumieni towarów przepływających między tymi obiektami był jak najmniejszy. Artykuł ten przedstawia nowy sposób modelowania problemu przy wykorzystaniu grafów dwudzielnych i nowy sposób rozwiązania problemu, krok po kroku, polegający na znalezieniu maksymalnego dopasowania o minimalnej wadze z uwzględnieniem fizycznego umiejscowienia fabryk (obiektów) w lokalizacjach.

Słowa kluczowe: kwadratowe zagadnienie przydziału, graf dwudzielny

1. WPROWADZENIE

Kwadratowe zagadnienie przydziału polega przydziale zbioru fabryk do zbioru lokalizacji przy uwzględnieniu odległości pomiędzy lokalizacjami i strumieni towarów pomiędzy fabrykami [1]. Głównym celem jest taki przydział, aby koszt tego przydziału był jak najmniejszy, czyli głównym zdaniem jest zminimalizowanie sumy iloczynów przepływu i dystansów między fabrykami. Szukamy minimum C, jeśli przez C oznaczać będziemy koszt przydziału:

$$C = \sum_{x,y:\ fabryki} strumie\acute{n}(x,y) \times odleg\l{}o\acute{s}\acute{c}(x,y) \tag{1}$$

W szczególności naszym zadaniem jest znalezienie takiej permutacji Π n-elementowej, która minimalizuje:

$$f(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \{ f(i,j) \times d[\Pi(i), \Pi(j)] \} \tag{2}$$

gdzie:
$\pi(i)$ - lokalizacja przypisana do elementu i.

Zazwyczaj wartości strumieni jak i odległości przedstawia się za pomocą dwóch macierzy kwadratowych o wartościach rzeczywistych. Jednakże można też kwadratowe zagadnienie przydziału przedstawić za pomocą jednej macierzy kwadratowej reprezentującej graf dwudzielny o dwóch zbiorach wierzchołków X i Y, gdzie X oznaczać będzie strumienie, a Y odległości i wówczas kwadratowe zagadnienie przydziału jest przedstawione jako zwykłe liniowe zagadnienie przydziału z dodatkowym warunkiem dotyczącym właściwego przypisania strumieni do odległości. To właściwe przypisanie strumieni do odległości ma uwzględniać faktyczne fizyczne przypisanie fabryk do lokalizacji.

[*] Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej

Istnieje wiele sposobów rozwiązywania liniowego i kwadratowego zagadnienia przydziału, wśród których można wymienić między innymi: metodę węgierską, metodę najkrótszej ścieżki powiększającej, metodę zachłanną i metodę branch-and-bound oraz inne [1..10].

2. METODA UZYSKANIA ROZWIĄZANIA

W pierwszej kolejności należy utworzyć macierz kwadratową reprezentującą graf dwudzielny ze zbiorami wierzchołków reprezentujących strumienie i odległości DF na podstawie dwóch kwadratowych macierzy odległości między lokalizacjami D i strumieniami między fabrykami F. Następnie korzystając z metody węgierskiej należy wyznaczyć przydział strumieni do odległości o minimalnym koszcie. Jeśli przydział strumieni do odległości odpowiada fizycznemu przypisaniu fabryk do lokalizacji mamy rozwiązanie kwadratowego problemu przydziału, w przeciwnym przypadku uzyskany przydział zawiera w sobie niewłaściwe przypisanie strumieni do odległości i koszt przydziału jest mniejszy od kosztu przydziału, jaki występuje przy minimalnym koszcie rozwiązania kwadratowego zagadnienia przydziału i wtedy nakładamy karę na uzyskane rozwiązanie poprzez zwiększenie wartości wag o jeden dla wszystkich krawędzi tworzących uzyskane rozwiązanie w kwadratowej macierzy grafu dwudzielnego. Metodę powyższą można przedstawić w postaci dwóch zasadniczych kroków:
1) wymnożenie przez siebie kwadratowych macierzy odległości D i strumieni F i stworzenie macierzy DF reprezentującej graf dwudzielny, gdzie:
- wierzchołki X to wierzchołki odległości
- wierzchołki Y to wierzchołki strumieni
- wierzchołki X i Y połączone są krawędziami o przypisanych wagach będących iloczynami strumieni i odległości

2) powtarzaj, aż uzyskasz rozwiązanie zagadnienia QAP
- wyznaczenie przydziału o minimalnym koszcie metodą węgierską
- weryfikacja czy otrzymane rozwiązanie to rozwiązanie zagadnienia QAP
- gdy nie ma rozwiązania nałóż karę na krawędzie uczestniczące w otrzymanym przydziale

3. PRZEBIEG DZIAŁANIA METODY ALTERNATYWNEJ

Przedmiotowy przykład określony zostanie przez dwie macierze odległości D i strumieni F, które zostały przedstawione w tabeli 1.

Tabela 1. Macierz odległości D i macierz strumieni F.

D	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	F	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	-	10	6	4	7	**1**	-	4	5	2	3
2	10	-	1	8	5	**2**	4	-	2	1	2
3	6	1	-	2	9	**3**	5	2	-	3	2
4	4	8	2	-	3	**4**	2	1	3	-	2
5	7	5	9	3	-	**5**	3	2	2	2	-

W tabeli 2 przedstawiono macierz DF, w której kolumny *(x,y)* reprezentują strumienie między fabrykami *x* i *y*, zaś wiersze *(k,m)* odległości między lokalizacjami *k* i *m*. Elementy tej macierzy to iloczyny odległości i strumienia i są wagami grafu dwudzielnego. W macierzy DF identycznymi kolumnami są 12 i 45 oraz 15 i 34, a także cztery kolumny: 14, 23, 25 i 35. Identyczność tych kolumn pod względem wartości w nich zawartych pozwala na bezkosztowe zamienianie odpowiednich dla nich strumieni, które są poprzez te kolumny reprezentowane, w otrzymanych przydziałach do odległości.

Tabela 2. Macierz DF reprezentująca graf dwudzielny powstała z wymnożenia macierzy D i F.

D*F	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(3,5)	(4,5)
(1,2)	40	50	20	30	20	10	20	30	20	40
(1,3)	24	30	12	18	12	6	12	18	12	24
(1,4)	16	20	8	12	8	4	8	12	8	16
(1,5)	28	35	14	21	14	7	14	21	14	28
(2,3)	4	5	2	3	2	1	2	3	2	4
(2,4)	32	40	16	24	16	8	16	24	16	32
(2,5)	20	25	10	15	10	5	10	15	10	20
(3,4)	8	10	4	6	4	2	4	6	4	8
(3,5)	36	45	18	27	18	9	18	27	18	36
(4,5)	12	15	6	9	6	3	6	9	6	12

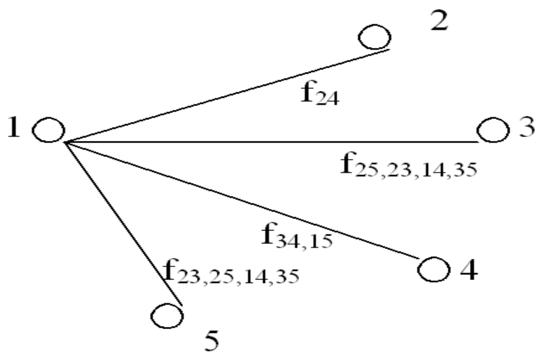
Metoda węgierska służy do wyznaczenia w każdym wierszu i w każdej kolumnie elementu minimalnego i pomniejszenie o ich wartość wszystkich elementów macierzy tak, aby otrzymać w każdym wierszu i kolumnie zero i wtedy przystępuje się do uzyskania przydziału, co przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3. Macierz DF z wyznaczonym przydziałem po procedurze węgierskiej.

D*F	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(3,5)	(4,5)
(1,2)	13	22	1	6	1	0	1	6	1	13
(1,3)	4	9	0	1	0	3	0	1	0	4
(1,4)	1	4	1	0	1	6	1	0	1	1
(1,5)	6	12	0	2	0	1	0	2	0	6
(2,3)	0	0	6	2	6	13	6	2	6	0
(2,4)	8	15	0	3	0	1	0	3	0	8
(2,5)	2	5	0	0	0	4	0	0	0	2
(3,4)	0	1	4	1	4	11	4	1	2	0
(3,5)	10	18	0	4	0	0	0	4	0	10
(4,5)	0	2	2	0	2	8	2	0	2	0

Aby zweryfikować czy wyznaczony przydział o minimalnym koszcie jest rozwiązaniem problemu przydziału z kwadratowym wskaźnikiem jakości należy sprawdzić, czy przypisane strumienie przepływu między fabrykami do odległości pomiędzy lokalizacjami tych fabryk odpowiadają fizycznemu umiejscowieniu fabryk w lokalizacjach.

Na rysunku 1 przedstawiono przypisanie strumieni do odległości na podstawie otrzymanego przydziału z rysunku 2. Zamiany bezkosztowe pomiędzy strumieniami możliwe są wśród następujących podzbiorów (12,45), (14,35,23,25) oraz (15,34) tzn., że możliwa jest ich zamiana bez powiększania kosztu przydziału. Strumienie 13 oraz 24 nie mają swoich bezkosztowych zamienników. Fabryka 1 w lokalizacji 1 nie może być umieszczona, gdyż uwzględniając nawet bezkosztowe zamiany strumieni nie można przypisać odległościom od lokalizacji 1 strumieni f_{12} i f_{13}. Fabryka 2 w lokalizacji 1 nie może być umieszczona, gdyż nie można przypisać strumienia f_{12}. Fabryka 3 również nie może być umieszczona w lokalizacji 1, gdyż nie można przypisać strumienia f_{13}. Fabryka 4 i 5 ze względu na brak przypisania strumienia f_{45} do żadnej z odległości od lokalizacji 1 do pozostałych.



Rys. 1. Krawędzie od lokalizacji 1 do pozostałych z przypisanymi strumieniami *f*.

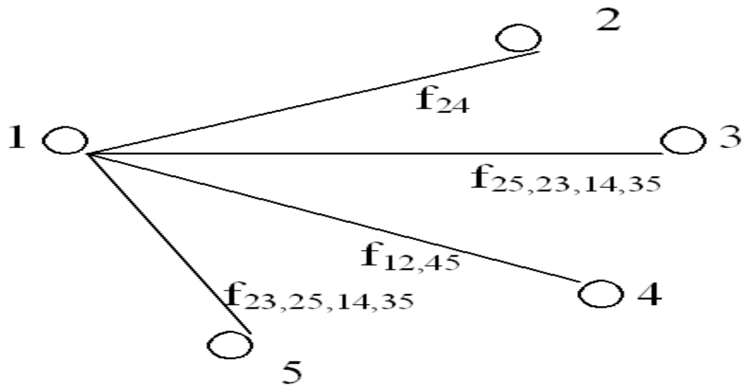
Źródło: opracowanie własne

W związku z powyższym, ze względu na to, że uzyskany przydział o minimalnym koszcie strumieni do odległości nie jest przydziałem spełniającym warunek, jaki ma spełniać rozwiązanie kwadratowego zagadnienia przydziału, czyli fizycznego umiejscowienia fabryk w lokalizacjach, nakładamy karę na krawędzie uczestniczące w tym dopasowaniu poprzez powiększenie ich wartości wag o jeden.

Tabela 4. Uzyskane przydziały w trakcie stosowania przedstawionej metody.

Uzyskany przydział	C	Czy QAP
(12,24),(13,25),(14,34),(15,23),(23,13),(24,14),(25,15),(34,45),(35,35),(45,12)	122	NIE
(12,35),(13,34),(14,12),(15,25),(23,45),(24,24),(25,23),(34,13),(35,14),(45,15)	127	NIE
(12,24),(13,14),(14,34),(15,35),(23,13),(24,25),(25,15),(34,12),(35,23),(45,45)	122	NIE
(12,25),(13,34),(14,12),(15,35),(23,45),(24,24),(25,23),(34,13),(35,14),(45,15)	127	NIE
(12,23),(13,15),(14,14),(15,24),(23,13),(24,25),(25,12),(34,34),(35,35),(45,45)	131	NIE
(12,24),(13,15),(14,34),(15,35),(23,12),(24,25),(25,25),(34,45),(35,14),(45,13)	125	NIE
(12,23),(13,25),(14,12),(15,24),(23,34),(24,35),(25,15),(34,13),(35,14),(45,45)	129	NIE
(12,35),(13,34),(14,25),(15,23),(23,12),(24,24),(25,45),(34,15),(35,14),(45,13)	131	NIE
(12,24),(13,35),(14,45),(15,23),(23,13),(24,14),(25,34),(34,12),(35,25),(45,15)	123	NIE
(12,35),(13,34),(14,15),(15,23),(23,45),(24,24),(25,12),(34,13),(35,14),(45,25)	130	NIE
(12,14),(13,34),(14,13),(15,24),(23,15),(24,23),(25,25),(34,12),(35,35),(45,45)	132	NIE
(12,24),(13,35),(14,34),(15,25),(23,13),(24,23),(25,45),(34,12),(35,14),(45,15)	124	NIE
(12,25),(13,23),(14,12),(15,24),(23,45),(24,35),(25,15),(34,34),(35,14),(45,13)	125	NIE
(12,23),(13,15),(14,14),(15,25),(23,45),(24,24),(25,12),(34,34),(35,35),(45,13)	131	NIE
(12,24),(13,15),(14,13),(15,14),(23,12),(24,23),(25,35),(34,45),(35,25),(45,34)	127	NIE
(12,24),(13,14),(14,13),(15,23),(23,15),(24,25),(25,34),(34,45),(35,35),(45,12)	128	NIE
(12,24),(13,34),(14,12),(15,23),(23,15),(24,25),(25,35),(34,13),(35,14),(45,45)	127	NIE
(12,24),(13,35),(14,12),(15,25),(23,15),(24,14),(25,45),(34,13),(35,23),(45,34)	128	TAK

Po nałożeniu kary powtarzamy postępowanie tak jak uprzednio w celu otrzymania przydziału o minimalnym koszcie. Powtarzamy tak dopóty, dopóki nie otrzyma się takiego przydziału strumieni do odległości, który będzie odpowiadać fizycznemu przypisaniu fabryk do lokalizacji. Przydziały strumieni do odległości uzyskane w wyniku powtórzeń zawarto w tabeli 4. Przydziały 15, 16, 17 i 18 otrzymano na podstawie jednej macierzy z zerami w każdym wierszu i kolumnie otrzymanej w wyniku wyznaczenia krawędzi uczestniczących w przydziale o minimalnym koszcie metodą węgierską. Przy uzyskaniu danego przydziału wagi krawędzi uczestniczące w tym przydziale są zwiększane o jeden i ponownie metodą węgierską wyznacza się przydział o minimalnym koszcie.



Rys. 2. Przydział 18 strumieni do odległości od lokalizacji 1 do pozostałych.

Źródło: opracowanie własne

Dla ostatniego przydziału z tabeli 4 przedstawionego na rysunku 2 wynika, że w lokalizacji 1 jest umieszczona fabryka 2.

Tabela 5. Permutacje przestrzeni rozwiązań kwadratowego zagadnienia przydziału i koszty C.

Permut.	koszt	Permut.	koszt	Permut.	koszt	Permut.	koszt	Permut.	koszt
12345	155	21345	142	31245	165	41235	153	51234	154
12354	164	21354	149	31254	154	41253	144	51243	146
12435	158	21435	173	31425	183	41325	150	51324	159
12453	167	21453	156	31452	159	41352	138	51342	140
13245	171	21534	169	31524	179	41523	157	51423	170
13254	158	21543	149	31542	156	41532	154	51432	159
13425	172	23145	144	32145	141	42135	135	52134	136
13452	154	23154	131	32154	140	42153	146	52143	148
14235	158	23415	158	32415	163	42315	149	52314	154
14253	167	23451	141	32451	153	42351	154	52341	163
14325	146	23514	160	32514	158	42513	137	52413	159
14352	142	23541	156	32541	160	42531	144	52431	139
14523	144	24135	145	34125	153	43125	146	53124	139
14532	147	24153	162	34152	169	43152	144	53142	150
15234	148	24315	128	34215	138	43215	159	53214	152
15243	170	24351	161	34251	167	43251	154	53241	174
15324	162	24513	148	34512	137	43512	157	53412	148
15342	167	24531	142	34521	150	43521	158	53421	139
15423	158	25134	135	35124	147	45123	165	54123	164
15432	141	25143	165	35142	164	45132	152	54132	163
12534	164	25314	140	35214	142	45213	152	54213	151
12543	156	25341	168	35241	172	45231	160	54231	171
13524	174	25413	140	35412	135	45312	150	54312	142
13542	167	25431	136	35421	148	45321	170	54321	163

Fabryka 4 nie jest umieszczona w lokalizacji 1, ze względu na brak przypisania strumienia f_{34} do odległości od tej lokalizacji do pozostałych. Fabryki 1, 3 i 5 nie mogą znajdować się w lokalizacji 1, gdyż odległości (1,2) pomiędzy lokalizacją 1 i 2 przypisano jedynie strumień f_{24} występujący pomiędzy fabrykami 2 i 4, co wyklucza fizyczne umiejscowienie w lokalizacji 1 innych fabryk niż 2 i 4. Dalsze prześledzenie przydziału 18 dla pozostałych lokalizacji umożliwia ustalenie, że w lokalizacji 2 znajduje się fabryka 4, w trzeciej fabryka 3, zaś w czwartej i piątej odpowiednio fabryka 1 i 5. Otrzymano wobec tego permutację 24315. Jak widać z tabeli 5 jest to permutacja będąca rozwiązaniem kwadratowego zagadnienia przydziału o najniższym koszcie i otrzymany wynik jest wynikiem prawidłowym.

4. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona alternatywna metoda rozwiązywania kwadratowego zagadnienia przydziału ze względu na wyznaczanie kolejnych przydziałów o minimalnym koszcie nie spełniających warunku fizycznego umiejscowienia fabryk w lokalizacjach wymaga przeprowadzenia szeregu żmudnych obliczeń i nie jest z tego powodu zbyt efektywna. Główną jej zaletą w stosunku do istniejących już metod jest jej odmienność w sposobie uzyskania rozwiązania i w tym względzie jest to sposób oryginalny, nowy i dotychczas nie opublikowany w czasopismach naukowych.

LITERATURA

[1] Baj W.: *Kwadratowe zagadnienie przydziału*, praca magisterska 2008, Katedra Automatyki, Politechnika Krakowska.

[2] Burkard R.E., Cela E.: *Handbook of combinatorial optimization*, 1999, Kluwer Dordrecht.

[3] Charnesethikul P.: *An exact branch and bound algorithm for the general quadratic assignment problem*, 1988, Ph.D dissertation, Texas Tech University.

[4] Clausen J.: *Branch and bound algorithms – principles and examples*, 1999, Tech. Raport, Department of Computer Science, University of Copenhagen, Denmark.

[5] Dolan A., Aldous J.: *Networks and algorithms,* John Wiley & Sons, England 1993.

[6] Dorigo M.: *Local search and metaheuristic for the quadratic assignment problem*, 1999, New idea in optimization, McGraw-Hill.

[7] Ji P., Wu Y., Liu H.: *A solution method for the quadratic assignment problem*, 2006, The Sixth International Symposium on Operational Research and Its Applications (ISORA'2006), 106-16.

[8] Koopmans T.C., Beckmann M.J.: *Assignment problems and the location of economics activities*, 1957, Econometrica, 25, str. 53-76.

[9] Povh J.: *Assignment problems in Logistics*, Logistics and Sustainable Transport, 2006, vol.1, issue.3 ,str. 72-81.

[10] http://www.intellektik.informatik.tu-darmstadt.de/~meta/QAP/qap.html

ALTERNATIVE METHOD FOR QUADRATIC ASSIGNMENT PROBLEM

Abstract

A new method for quadratic assignment problem is presented. The problem is modeled by a bipartite graph. Hungarian method is used for finding the solution: the assignment with minimum costs is found, but this solution must take into consideration of real objects localizations.

Kyewords: quadratic assignment problem, bipartite graph