

Stanisław BOCIAN¹

**ZŁOŻONOŚĆ PÓŁGRUPY CHARAKTERYSTYCZNEJ SUMY PROSTEJ
AUTOMATÓW ASYNCHRONICZNYCH SILNIE SPÓJNYCH USTALONYCH
ANALOGÓW ROZSZERZEŃ ZWIĄZANYCH Z IZOMORFIZMAMI**

Półgrupa charakterystyczna automatu ingeruje w algorytm obliczeniowy uogólnionych homomorfizmów automatów, zatem wyznaczenie złożoności półgrupy charakterystycznej pozwala na oszacowanie złożoności obliczeniowej uogólnionych homomorfizmów dla innych klas automatów. W zakresie modelu matematycznego koncepcja ustalonego analogu rozszerzenia automatu A związanego z izomorfizmami $g^0, g^1, \dots, g^{q-1}$, gdzie q stopień rozszerzenia, przy odpowiednich założeniach symuluje automat zmienny w czasie. Automat zmienny w czasie jest adekwatnym modelem matematycznym dla wielu procesów technicznych i obliczeniowych czasu rzeczywistego. Automaty te symulują pracę kilku automatów za pomocą jednego automatu zmiennego w czasie. Sumę prostą automatów można uważać za realizację – odpowiednio sekwencyjnych obliczeń.

**COMPLEXITY OF THE CHARACTERISTIC SEMI-GROUP OF THE
ASYNCHRONOUS AUTOMATONS DIRECT SUM OF THE STRONGLY
CONNECTED DETERMINED ANALOGS, THEIR EXTENSIONS ASSOCIATED
WITH ISOMORPHISMS**

The characteristic semi-group of the automaton interferes in the computational algorithm of the generalized homeomorphisms of the automats. Then determination the complexity of the characteristic semi-group enables to estimate the complexity of the computational generalized homeomorphisms for the other classes of automats.

In the range of the mathematical model the conception of the determined analog of the extension of the automaton A associated with the isomorphisms $g^0, g^1, \dots, g^{q-1}$, where q is the grade of the extensions, with the suitable assumptions it simulates the automaton variable in time. The variable automaton in time is the adequate mathematical model for the many technical and computational processes of the real time. The direct sum of automats can be considered as the realization – sequence calculations accordingly.

¹¹ Stanisław BOCIAN Instytut Pojazdów Szynowych „TABOR” POLSKA; Poznań 61-055; Warszawska 181.
Telefon: + 48 (0)61 664 14 38; E-mail: Elektrotechnika @ tabor.com.pl

1. ROZWAŻANIA WPROWADZAJĄCE

Relację $R \subseteq X \times Y$ nazywamy funkcją, gdy dla każdego $a \in X$ istnieje dokładnie jeden element $b \in Y$ taki że $a R b$. Zbiór X jest nazywany zbiorem określoności, a zbiór Y zbiorem wartości funkcji. Funkcja f jest 1–1 (różnowartościowa, jednoznaczna), gdy $a_1 \neq a_2$ implikuje, że $f(a_1) \neq f(a_2)$. Funkcja jest „na”, gdy

$$Y = \{ b : b = f(a), a \in X \}.$$

Grupoidem nazywamy parę uporządkowaną $(S, \circ)$ gdzie: S niepusty zbiór, $(\circ)$ operacja binarna na zbiorze stanów S . Operacją binarną na zbiorze S nazywamy przekształcenie niepustego podzbioru zbioru $S \times S$ w zbiór S . Binarną operacją $(\circ)$ na zbiorze S nazywamy łączną (asocjatywną), jeśli

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \text{ dla wszystkich } a, b, c \in S.$$

Półgrupa, to taki grupoid $(S, \circ)$, w którym operacja $(\circ)$ jest asocjatywna. Niech Σ będzie dowolnym zbiorem niepustym. Zbiór Σ będziemy nazywali alfabetem, a jego elementy literami. Słowem x w alfabecie Σ nazywamy dowolny ciąg liter alfabetu, napisanych obok siebie, a długość słowa (oznaczoną przez $|x|$) nazywamy liczbę tych liter σ .

Skończonym automatem zdeterminowanym bez wyjść nazywam uporządkowaną trójkę (S, Σ, M) , gdzie:

S – jest skończonym, niepustym zbiorem stanów,

Σ – jest skończonym, niepustym zbiorem wejść,

$M : S \times \Sigma \rightarrow S$ jest funkcją przejść.

Symbolem Σ^+ oznaczać będziemy przeliczalny nieskończony zbiór ciągów o skończonej długości, utworzony z elementów zbioru Σ . Zbiór Σ^+ razem z operacją konkatenacji (operacja połączenia dwóch słów, polegająca na napisaniu ich obok siebie w celu otrzymania nowego słowa), tworzy półgrupę wolną zwaną półgrupą wejściową. Symbole Σ^* oznaczać będziemy monoid wejściowy, czyli $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \lambda$, gdzie λ jest ciągiem pustym.

Funkcję M rozszerzamy do obszaru określoności $S \times \Sigma^+$ w następujący sposób: niech $M(s, x)$ będzie zdefiniowane, wtedy:

$$M(s, x\sigma) = M(M(s, x), \sigma) \text{ dla każdego } s \in S, x \in \Sigma^+, \sigma \in \Sigma.$$

Na zbiorze Σ^* zdefiniujemy relację:

$$x R y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall_{s \in S} M(s, x) = M(s, y).$$

R jest relacją równoważności (relacja Myhilla). Klasę równoważności zawierającą element $x \in \Sigma^*$ oznaczać będziemy $\bar{x}$, a zbiór wszystkich klas równoważności oznaczać będziemy $\bar{I}$. Zbiór $\bar{I}$ łącznie z operacją $(\circ)$, gdzie $\bar{x} \circ \bar{y} = \overline{xy}$ tworzy półgrupę

(odpowiednio monoid), zwaną półgrupą charakterystyczną (odpowiednio monoidem charakterystycznym). Półgrupę charakterystyczną automatu A oznaczamy będziemy $\bar{I}(A)$.

Dla automatu $A = (S, \Sigma, M)$ definiujemy automat charakterystyczny $A = (S, \bar{I}(A), \bar{M})$, gdzie funkcja przejść $\bar{M}$ jest zdefiniowana następująco $\bar{M}(s, \bar{x}) = M(s, x)$.

Składnikiem autonomicznym automatu $A = (S, \Sigma, M)$ nazywamy automat $A_x = (S, \{x\}, M_x)$ gdzie $x \in \Sigma^*$ i M_x jest ograniczeniem M do $S \times \{x\}$.

Dla każdego $x \in \Sigma^*$ zdefiniujemy przekształcenie f_x zbioru S w siebie, gdzie :
 $f_x(s) = M(s, x)$, dla każdego $s \in S$. Przekształcenie f_x jest implikowane przez x .
 Zbiór przekształceń zbioru S w siebie implikowanych przez wszystkie elementy z Σ będziemy oznaczać symbolem J . J ze względu na operację superpozycji, jest zbiorem generatorów pewnej półgrupy.

Półgrupa F jest antyizomorficzna z $\bar{I}$ ponieważ:

$\varphi : \bar{I} \rightarrow F$, $\varphi(\bar{x}) = f_x$, gdzie $x \in I$, $\bar{x} \in \bar{I}$ przy czym:

- (i) $\varphi(\bar{x} \circ \bar{y}) = \varphi(\overline{xy}) = f_{xy} = f_y(f_x) = \varphi(\bar{y})\varphi(\bar{x})$
- (ii) $\varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{y}) \Rightarrow f_x = f_y \Rightarrow \forall_{s \in S} M(s, x) = M(s, y) \Rightarrow x R y \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$, a zatem φ jest „1-1”
- (iii) $\varphi(\bar{x}) = f_x \Rightarrow \varphi^{-1}\varphi(\bar{x}) = \varphi^{-1}(f_x) \Rightarrow \bar{x} = \varphi^{-1}(f_x)$, a zatem φ jest na.

Automat można zatem zdefiniować jako parę (S, J) , a automat charakterystyczny automatu (S, J) jako parę (S, F) .

Automat $A = (S, \Sigma, M)$ jest silnie spójny wtedy i tylko wtedy, jeśli dla każdej pary (s_1, s_2) stanów automatu A istnieje element x z półgrupy wejściowej taki, że $M(s_1, x) = s_2$.

Automat $A = (S, \Sigma, M)$ będziemy nazywać asynchronicznym wtedy i tylko wtedy gdy, gdy dla każdego $s \in S$ i $\sigma \in \Sigma$ zachodzi $M(s, \sigma) = M(s, \sigma\sigma)$.

Automat $A = (S, \Sigma, M)$ jest zupełny, jeśli jego funkcja przejścia jest zupełna.

Automat $A = (S, \Sigma, M)$ jest w pełni określony, jeśli jego funkcja przejść jest w pełni określona.

Niech $A = ({}^A S, \Sigma, {}^A M)$ i $B = ({}^B S, \Sigma, {}^B M)$ będą automatami deterministycznymi. Funkcja $f : A \rightarrow B$ jest rozumiana jako funkcja przekształcająca ${}^A S$ w ${}^B S$. Funkcja $f : A \rightarrow B$ nazywamy homomorfizmem (zachowuje operacje), jeżeli: $f({}^A M(s, \sigma)) = {}^B M(f(s), \sigma)$, dla każdego $s \in S$ i $\sigma \in \Sigma$.

Jeżeli $f : A \rightarrow B$ jest „1-1” i „na” oraz zachowuje operacje to f nazywamy izomorfizmem.

Homomorfizmem uogólnionym automatu A w B nazywamy parę przekształceń (f_1, f_2) takich, że: $f_1 : {}^A S \xrightarrow{w} {}^B S$, $f_2 : {}^A \Sigma^* \xrightarrow{w} {}^B \Sigma^*$ oraz

$$f_1({}^A M(s, x)) = {}^B M(f_1(s), f_2(x)) \text{ dla każdego } s \in {}^A S, x \in {}^B \Sigma^*.$$

Niech $q \geq 2$ i $A^0 = (S^{q-1}, \Sigma, M^{q-1})$ będzie automatem, niech, $A^1 = (S^1, \Sigma, M^1), \dots, A^{q-1} = (S^{q-1}, \Sigma, M^{q-1})$ będą obrazami izomorficznymi związanymi z izomorfizmami stanowymi

$g^1 \in \text{Iz}(A^0 \rightarrow A^1), \dots, g^{q-1} \in \text{Iz}(A^{q-2} \rightarrow A^{q-1})$. Rozszerzeniem q automatu A związanym z izomorfizmami stanowymi $g^0, g^1, \dots, g^{q-1}$ nazywamy trójkę uporządkowaną $\text{ext}_q(A) = ({}^{\text{ext}_q(A)} S, \Sigma, {}^{\text{ext}_q(A)} M)$ gdzie:

$${}^{\text{ext}_q(A)} S = (S^0, S^1, \dots, S^{q-1}) \quad {}^{\text{ext}_q(A)} M^q = (M^{q,0}, M^{q,1}, \dots, M^{q,q-1})$$

$$g^i : S \rightarrow S^i \quad i = 0, 1, \dots, q-1$$

$$S = \{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\} \quad S^i = \{s_0^i, s_1^i, \dots, s_{n-1}^i\}$$

$$\text{natomiast } s_j^i = g^i(s_j) \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

Ustalonym analogiem rozszerzeni $\text{ext}_q A = (S, \Sigma, M)$ automatu

$A = (S, \Sigma, M)$ związanego z izomorfizmami $g^0, g^1, \dots, g^{q-1}$ jest trójka uporządkowana $(\text{ext}_q(A))^* = ({}^{\text{ext}_q(A)} S^*, \Sigma, {}^{\text{ext}_q(A)} M^*)$ gdzie:

$${}^{\text{ext}_q(A)} S^* = \bigcup_{i=0}^{q-1} S^i, \text{ a } {}^{\text{ext}_q(A)} M^* : {}^{\text{ext}_q(A)} S^* \times \Sigma \rightarrow {}^{\text{ext}_q(A)} S^*$$

jest funkcją przejść zdefiniowaną dla dowolnych $s \in S^i$, jak następuje ${}^{\text{ext}_q(A)} M^*(s, \sigma) = M^{q,i}(s, \sigma)$. Dla wszystkich przedstawionych rozważań $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1\}$

wprowadzamy $x_0 = \sigma_0 \sigma_1$ i $x_1 = \sigma_1 \sigma_0$, dla których $f_{x_0} = f_{\sigma_1}(f_{\sigma_0})$, $f_{x_1} = f_{\sigma_0}(f_{\sigma_1})$. Dla dowolnego $x \in \Sigma^*$ zdefiniujemy przekształcenie

$f_x : S \xrightarrow{w} S$ określone jak następuje: $\forall_{s \in S} f_x(s) = M(s, x)$ gdzie: dla $x = x' \sigma$ mamy $\forall_{s \in S} f_x(s) = f_{x' \sigma}(s) = f_{\sigma}(f_{x'}(s, \sigma))$.

Sumę prostą automatów $A = ({}^A S, \Sigma, {}^A M)$ i $B = ({}^B S, \Sigma, {}^B M)$ jest trójka uporządkowana $A \cup B = ({}^{A \cup B} S, \Sigma, {}^{A \cup B} M)$, gdzie ${}^{A \cup B} S = {}^A S \cup {}^B S$;

${}^{A \cup B} M : {}^{A \cup B} S \times \Sigma \rightarrow {}^{A \cup B} S$ i dla każdego $s \in {}^{A \cup B} S$ i $\sigma \in \Sigma$ zachodzi

$$^{A \cup B}M(s, \sigma) = \begin{cases} ^AM(s, \sigma) & \text{jeśli } ^AS \in ^AS \\ ^BM(s, \sigma) & \text{jeśli } ^BS \in ^BS \end{cases}$$

Dla wszystkich przedstawionych rozważań $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1\}$

wprowadzamy $x_0 = \sigma_0\sigma_1$ i $x_1 = \sigma_1\sigma_0$, dla których $f_{x_0} = f_{\sigma_1}(f_{\sigma_0})$, $f_{x_1} = f_{\sigma_0}(f_{\sigma_1})$. Dla dowolnego $x \in \Sigma^*$ zdefiniujemy przekształcenie

$f_x : S \xrightarrow{w} S$ określone jak następuje: $\forall_{s \in S} f_x(s) = M(s, x)$ gdzie: dla $x = x'\sigma$ mamy $\forall_{s \in S} f_x(s) = f_{x'}(s) = f_{\sigma}(f_{x'}(s, \sigma))$.

Przy wyznaczaniu złożoności półgrupy charakterystycznej sumy prostej automatu z klasy EXT DFASC₂ (deterministic finite asynchronous strongly connected extensions) wykorzystano nowy algorytm na wyznaczanie najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych przedstawiony w [1,3,5,6,8]. W pracach [5,6,8] przeprowadzono formalny dowód. W pracy [8] pokazano także odpowiednią interpretację graficzną przedstawiono także programy języku BASIC, PASCAL i C++ wraz wizualizacją i praktyczną realizacją

2. ZŁOŻONOŚĆ PÓŁGRUPY CHARAKTERYSTYCZNEJ SUMY PROSTEJ AUTOMATÓW Z KLASY EXT DFASC₂

W publikacjach [1,4] przedstawiono szkice dowodów na złożoność półgrup charakterystycznych sumy prostej i iloczynu prostego automatu DFASC₂ (deterministic finite asynchronous connected extensions) i EXT DFASC₂ (deterministic finite asynchronous strongly connected extensions). W pracy przedstawiono pełną wersję dowodu na złożoność półgrupy charakterystycznej sumy prostej automatów z klasy EXT DFASC₂

Twierdzenie 1.

Niech $ext_q(A \cup B) = (ext_q(A \cup B)S, \Sigma, ext_q(A \cup B)M)$ będzie rozszerzeniem stanowym

związanym z izomorfizmami $g_0, g_1, \dots, g^{q-1}$ sumy prostej $A \cup B = (^{A \cup B}S, \Sigma, ^{A \cup B}M)$

automatów $A = (^AS, \Sigma, ^BM)$ i $B = (^BS, \Sigma, ^BM)$ z DFASC₂ takimi, że:

$card(^AS) = m > 2$, $card(^BS) = n > 2$, $card(\Sigma) = 2$, $x_0 = \sigma_0\sigma_1$, $x_1 = \sigma_1\sigma_0$; wtedy

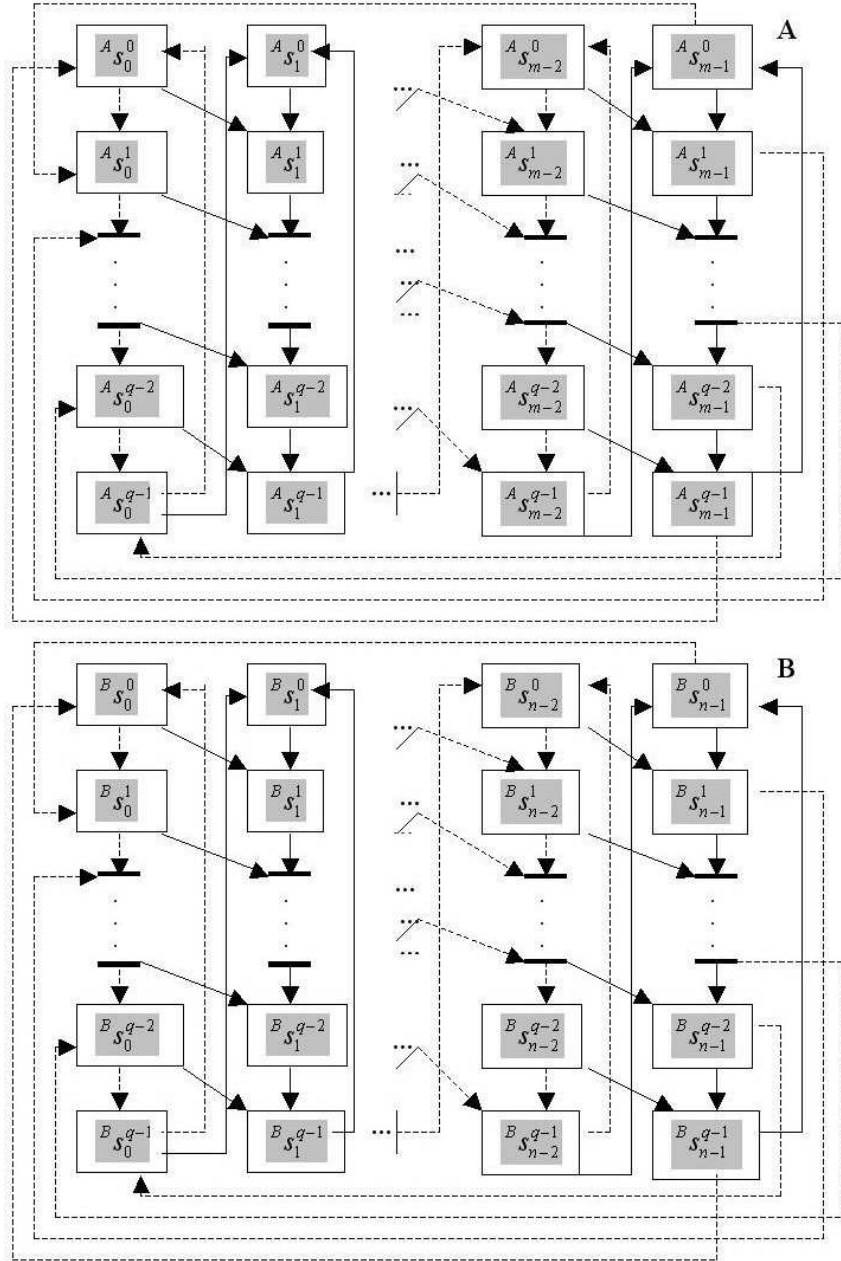
półgrupa charakterystyczna $\overline{I(ext_q(A \cup B))^*}$ ustalonego analogu rozszerzenia ma własność:

$$card(\overline{I(ext_q(A \cup B))^*}) = 2[m, n, q]q \quad (1)$$

Dowód.

Na rys.1 przedstawiono ustalone analogi $((ext_q(A))^*$ i $((ext_q(B))^*$ automatów A i B.

Niech: ${}^A S = \{ {}^A s_0^0, {}^A s_1^0, \dots, {}^A s_{m-2}^0, {}^A s_{m-1}^0, \dots, {}^A s_0^{q-1}, {}^A s_1^{q-1}, \dots, {}^A s_{m-2}^{q-1}, {}^A s_{m-1}^{q-1} \}$,
 ${}^B S = \{ {}^B s_0^0, {}^B s_1^0, \dots, {}^B s_{n-2}^0, {}^B s_{n-1}^0, \dots, {}^B s_0^{q-1}, {}^B s_1^{q-1}, \dots, {}^B s_{n-2}^{q-1}, {}^B s_{n-1}^{q-1} \}$. Wiadomo, że:



Rys. 1 Ustalane analogi $((\text{ext}_q(A))^*$ i $((\text{ext}_q(B))^*$ automatów A i B

$$ext_q(A \cup B)S = \left\{ \begin{array}{l} A s_0^0, A s_1^0, \dots, A s_{m-2}^0, A s_{m-1}^0, \dots, A s_0^{q-1}, A s_1^{q-1}, \dots, A s_{m-2}^{q-1}, A s_{m-1}^{q-1}, \\ B s_0^0, B s_1^0, \dots, B s_{n-2}^0, B s_{n-1}^0, \dots, B s_0^{q-1}, B s_1^{q-1}, \dots, B s_{n-2}^{q-1}, B s_{n-1}^{q-1} \end{array} \right\}$$

Po przekształceniu zbioru stanów $ext_q(A \cup B)S^q$ rozszerzenia stanowego sumy prostej automatów A i B pod wpływem litery σ_0 otrzymujemy:

$$ext_q(A \cup B)f_{\sigma_0} = \left(\begin{array}{l} A s_1^1, A s_1^1, \dots, A s_{m-1}^1, A s_{m-1}^1, \dots, A s_1^0, A s_1^0, \dots, A s_{m-1}^0, A s_{m-1}^0, \\ B s_1^1, B s_1^0, \dots, B s_{n-1}^1, B s_{n-1}^0, \dots, B s_1^0, B s_1^0, \dots, B s_{n-1}^0, B s_{n-1}^0 \end{array} \right)$$

Po $\sigma_0 \sigma_0$ - krotnej konkatenacji litery σ_0 otrzymujemy:

$$ext_q(A \cup B)f_{\sigma_0 \sigma_0} = \left(\begin{array}{l} A s_1^2, A s_1^2, \dots, A s_{m-1}^2, A s_{m-1}^2, \dots, A s_1^1, A s_1^1, \dots, A s_{m-1}^1, A s_{m-1}^1, \\ B s_1^2, B s_1^2, \dots, B s_{n-1}^2, B s_{n-1}^2, \dots, B s_1^1, B s_1^1, \dots, B s_{n-1}^1, B s_{n-1}^1 \end{array} \right)$$

Po q krotnej konkatenacji litery σ_0 otrzymujemy:

$$ext_q(A \cup B)f_{\sigma_0^q} = \left(\begin{array}{l} A s_1^0, A s_1^0, \dots, A s_{m-1}^0, A s_{m-1}^0, \dots, A s_1^{q-1}, A s_1^{q-1}, \dots, A s_{m-1}^{q-1}, A s_{m-1}^{q-1}, \\ B s_1^0, B s_1^0, \dots, B s_{n-1}^0, B s_{n-1}^0, \dots, B s_1^{q-1}, B s_1^{q-1}, \dots, B s_{n-1}^{q-1}, B s_{n-1}^{q-1} \end{array} \right)$$

Po $(q+1)$ - krotnej konkatenacji litery σ_0 otrzymujemy:

$$ext_q(A \cup B)f_{\sigma_0^{q+1}} = ext_q(A \cup B)f_{\sigma_0}$$

Dla przekształcenia $ext_q(A \cup B)f_{\sigma_0}$ pod wpływem q - krotnego działania litery σ_0 otrzymujemy ponownie przekształcenia $ext_q(A \cup B)f_{\sigma_0}$. W dalszych rozważaniach będziemy

analizować przekształcenia $ext_q(A \cup B)f_{\sigma_0}$. Rozważania dla przekształceń

$ext_q(A \cup B)f_{\sigma_0 \sigma_0}, \dots, ext_q(A \cup B)f_{\sigma_0^q}$ są analogiczne.

$$ext_q(A \cup B)f_{x_0} = \left(\begin{array}{l} A s_2^2, A s_2^2, \dots, A s_0^2, A s_0^2, \dots, A s_2^1, A s_2^1, \dots, A s_0^1, A s_0^1, \\ B s_2^2, B s_2^2, \dots, B s_0^2, B s_0^2, \dots, B s_2^1, B s_2^1, \dots, B s_0^1, B s_0^1 \end{array} \right)$$

Po $\frac{n}{2}$ krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ext_q(A \cup B)f_{x_0^{n-2}} = \left(\begin{array}{l} A s_{\frac{m-d_0}{k_0}}^n, A s_{\frac{m-d_0}{k_0}}^n, \dots, A s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2}^n, A s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2}^n, \dots, A s_{\frac{m-d_0}{k_0}}^{n-1}, A s_{\frac{m-d_0}{k_0}}^{n-1}, \dots, A s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2}^{n-1}, A s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2}^{n-1}, \\ B s_0^n, B s_0^n, \dots, B s_{n-2}^n, B s_{n-2}^n, \dots, B s_0^{n-1}, B s_0^{n-1}, \dots, B s_{n-2}^{n-1}, B s_{n-2}^{n-1} \end{array} \right)$$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania[m,n]:

$$\begin{aligned} d_0 &= m - k_0 n; & b_0 &= n - d_0; \\ k_0 &- \text{całkowita wielokrotność liczby } n, m; \quad m > n \\ d_1 &= m - b_0 - k_0 n; & b_1 &= n - d_1 \end{aligned}$$

•
•
•

$$\begin{aligned} d_{w-2} &= m - b_{w-3} - k_0 n; & b_{w-2} &= n - d_{w-2} \\ d_{w-1} &= m - b_{w-2} - k_0 n = 0 \end{aligned}$$

Wtedy $[m, n] = mw = p$

W przypadku gdy $d_x < 0$; gdzie $0 < x < w-1$, to w miejsce b_x wpisujemy bezwzględna wartość liczby d_x i obliczenia kontynuujemy dalej.

Gdy $n > m$ to $d_0 = n - k_0 m$, $b_0 = m - d_0$ i dalej postępujemy analogicznie.

Dowód przeprowadzamy zakładając, że $m > n$.

Po $\frac{n}{2} k_0$ krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \text{ext}_q(A \cup B) f_{x_0^{\frac{n}{2} k_0}} &= \\ &\left(\begin{array}{cccccccc} A_{m-d_0}^{nk_0} & A_{m-d_0}^{nk_0} & \dots, & A_{m-d_0-2}^{nk_0} & A_{m-d_0-2}^{nk_0} & \dots, & A_{m-d_0}^{nk_0-1} & A_{m-d_0}^{nk_0-1} & \dots, & A_{m-d_0-2}^{nk_0-1} & A_{m-d_0-2}^{nk_0-1} \\ B_0^{nk_0} & B_0^{nk_0} & \dots, & B_{n-2}^{nk_0} & B_{n-2}^{nk_0} & \dots, & B_0^{nk_0-1} & B_0^{nk_0-1} & \dots, & B_{n-2}^{nk_0-1} & B_{n-2}^{nk_0-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Po $k_0 n$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \text{ext}_q A \cup B f_{x_0^{k_0 n}} &= \\ &\left(\begin{array}{cccccccc} A_{m-d_1}^{2k_0 n} & A_{m-d_1}^{2k_0 n} & \dots, & A_{m-d_1-2}^{2k_0 n} & A_{m-d_1-2}^{2k_0 n} & \dots, & A_{m-d_1}^{2k_0 n-1} & A_{m-d_1}^{2k_0 n-1} & \dots, & A_{m-d_1-2}^{2k_0 n-1} & A_{m-d_1-2}^{2k_0 n-1} \\ B_0^{2k_0 n} & B_0^{2k_0 n} & \dots, & B_{n-2}^{2k_0 n} & B_{n-2}^{2k_0 n} & \dots, & B_0^{2k_0 n-1} & B_0^{2k_0 n-1} & \dots, & B_{n-2}^{2k_0 n-1} & B_{n-2}^{2k_0 n-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania $[m, n]$:

$$d_1 = m - b_0 - k_0 n; \quad b_1 = n - d_1$$

Po $\frac{wm}{2} = \frac{[m, n]}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \text{ext}_q(A \cup B) f_{x_0^{\frac{wm}{2}}} &= \\ &\left(\begin{array}{cccccccc} A_{m-d_{w-1}}^{wm} & A_{m-d_{w-1}}^{wm} & \dots, & A_{m-d_{w-1}-2}^{wm} & A_{m-d_{w-1}-2}^{wm} & \dots, & A_{m-d_{w-1}}^{wm-1} & A_{m-d_{w-1}}^{wm-1} & \dots, & A_{m-d_{w-1}-2}^{wm-1} & A_{m-d_{w-1}-2}^{wm-1} \\ A_{m-d_{w-1}-2}^{wm-1} & B_0^{wm} & B_0^{wm} & \dots, & B_{n-2}^{wm} & B_{n-2}^{wm} & \dots, & B_0^{wm-1} & B_0^{wm-1} & \dots, & B_{n-2}^{wm-1} & B_{n-2}^{wm-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania $[m, n]$:

$$d_{w-1} = m - b_{w-2} - k_0 n = 0; \quad [m, n] = w m = p.$$

Dla $d_{w-1} = 0$ możemy napisać przekształcenie $ext_q(A \cup B) f_{\frac{wm}{x_0^2}}$ w następujący sposób:

$$ext_q(A \cup B) f_{\frac{wm}{x_0^2}} = \begin{pmatrix} A_{S_0}^{wm} & A_{S_0}^{wm}, \dots, A_{S_{m-2}}^{wm} & A_{S_{m-2}}^{wm}, \dots, A_{S_0}^{wm-1} & A_{S_0}^{wm-1}, \dots, A_{S_{m-2}}^{wm-1} & A_{S_{m-2}}^{wm-1} \\ B_{S_0}^{wm} & B_{S_0}^{wm}, \dots, B_{S_{n-2}}^{wm} & B_{S_{n-2}}^{wm}, \dots, B_{S_0}^{wm-1} & B_{S_0}^{wm-1}, \dots, B_{S_{n-2}}^{wm-1} & B_{S_{n-2}}^{wm-1} \end{pmatrix}$$

Po σ_0 i $\frac{wm}{2} = \frac{[m, n]}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ext_q(A \cup B) f_{\frac{wm}{\sigma_0 x_0^2}} = \begin{pmatrix} A_{S_1}^{wm+1} & A_{S_1}^{wm+1}, \dots, A_{S_{m-1}}^{wm+1} & A_{S_{m-1}}^{wm+1}, \dots, A_{S_1}^{wm} & A_{S_1}^{wm}, \dots, A_{S_{m-1}}^{wm} & A_{S_{m-1}}^{wm} \\ B_{S_1}^{wm+1} & B_{S_1}^{wm+1}, \dots, B_{S_{n-1}}^{wm+1} & B_{S_{n-1}}^{wm+1}, \dots, B_{S_1}^{wm} & B_{S_1}^{wm}, \dots, B_{S_{n-1}}^{wm} & B_{S_{n-1}}^{wm} \end{pmatrix}$$

Po σ_0^q i $\frac{wm}{2}$ krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ext_q(A \cup B) f_{\frac{wm}{\sigma_0^q x_0^2}} = \begin{pmatrix} A_{S_1}^{wm} & A_{S_1}^{wm}, \dots, A_{S_{m-1}}^{wm} & A_{S_{m-1}}^{wm}, \dots, A_{S_1}^{wm-1} & A_{S_1}^{wm-1}, \dots, A_{S_{m-1}}^{wm-1} & A_{S_{m-1}}^{wm-1} \\ B_{S_1}^{wm} & B_{S_1}^{wm}, \dots, B_{S_{n-1}}^{wm} & B_{S_{n-1}}^{wm}, \dots, B_{S_1}^{wm-1} & B_{S_1}^{wm-1}, \dots, B_{S_{n-1}}^{wm-1} & B_{S_{n-1}}^{wm-1} \end{pmatrix}$$

Po σ_0^{q+1} i $\frac{wm}{2}$ krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ext_q(A \cup B) f_{\frac{wm}{\sigma_0^{q+1} x_0^2}} = ext_q(A \cup B) f_{\frac{wm}{\sigma_0^q x_0^2}}$$

Dla przekształcenia $ext_q(A \cup B) f_{\frac{wm}{\sigma_0 x_0^2}}$ pod wpływem q – krotnego działania litery σ_0

otrzymujemy ponownie przekształcenie $ext_q(A \cup B) f_{\frac{wm}{\sigma_0 x_0^2}}$.

W dalszych rozważaniach będziemy analizować przekształcenie $ext_q(A \cup B) f_{\frac{wm}{x_0^2}}$.

Rozważania dla przekształceń $ext_q(A \cup B) f_{\frac{wm}{\sigma_0 x_0^2}}, \dots, ext_q(A \cup B) f_{\frac{wm}{\sigma_0^q x_0^2}}$

są analogiczne. Z przytoczonych powyżej rozważań opartych na sposobie wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności dwóch liczb oraz uwzględniając definicję rozszerzenia stanowego automatu z klasy DFASC₂ wynika, że liczba dotychczas wygenerowanych przekształceń wynosi $q[m, n]$. Dla $[m, n] = mw = p$.

Po $\frac{p}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$\text{ext}_q(A \cup B) f_{x_0^2}^{\frac{p}{2}} =$$

$$\begin{pmatrix} A_{S_0}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}} A_{S_0}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}} ,..., A_{S_{m-2}}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}} A_{S_{m-2}}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}} ,..., A_{S_0}^{\frac{q-d_{0,0}-1}{k_1}} A_{S_0}^{\frac{q-d_{0,0}-1}{k_1}} ,..., A_{S_{m-2}}^{\frac{q-d_{0,0}-1}{k_1}} A_{S_{m-2}}^{\frac{q-d_{0,0}-1}{k_1}} \\ B_{S_0}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}} B_{S_0}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}} ,..., B_{S_{n-2}}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}} B_{S_{n-2}}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}} ,..., B_{S_0}^{\frac{q-d_{0,0}-1}{k_1}} B_{S_0}^{\frac{q-d_{0,0}-1}{k_1}} ,..., B_{S_{n-2}}^{\frac{q-d_{0,0}-1}{k_1}} B_{S_{n-2}}^{\frac{q-d_{0,0}-1}{k_1}} \end{pmatrix}$$

gdzie zgodnie z nowym sposobem wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności dla trzech liczb $[m, n, q] = [[m, n], q] = [p, q]$, gdzie: $p = [m, n]$;

k_1 - całkowita wielokrotność liczby p w q ; $q > p$

$d_{0,0} = q - k_1 p$, $b_{0,0} = p - d_{0,0}$,

$d_{1,1} = q - b_{0,0} - k_1 p$, $b_{1,1} = p - d_{1,1}$

.

.

.

$d_{t-2,t-2} = q - b_{t-3,t-3} - k_1 p$ $b_{t-2,t-2} = p - d_{t-2,t-2}$

$d_{t-1,t-1} = q - b_{t-2,t-2} - k_1 p = 0$

$[m, n, q] = [p, q] = [[m, n], q] = q t$

W przypadku gdy $d_x < 0$; gdzie $0 < x < t-1$, to w miejsce b_x wpisujemy bezwzględna wartość liczby d_x i obliczenia kontynuujemy dalej.

Gdy $p > q$ to $d_{0,0} = p - k_1 q$, $b_0 = q - d_{0,0}$ i dalej postępujemy analogicznie.

Dowód przeprowadzamy zakładając, że $q > p$.

Po $\frac{p}{2} k_1$ -krotnej konkatencji słowa x_0 otrzymujemy:

$$\text{ext}_q(A \cup B) f_{x_0^2}^{\frac{p k_1}{2}} =$$

$$\begin{pmatrix} A_{S_0}^{q-d_{0,0}} A_{S_0}^{q-d_{0,0}} ,..., A_{S_{m-2}}^{q-d_{0,0}} A_{S_{m-2}}^{q-d_{0,0}} ,..., A_{S_0}^{q-d_{0,0}-1} A_{S_0}^{q-d_{0,0}-1} ,..., A_{S_{m-2}}^{q-d_{0,0}-1} A_{S_{m-2}}^{q-d_{0,0}-1} \\ B_{S_0}^{q-d_{0,0}} B_{S_0}^{q-d_{0,0}} ,..., B_{S_{n-2}}^{q-d_{0,0}} B_{S_{n-2}}^{q-d_{0,0}} ,..., B_{S_0}^{q-d_{0,0}-1} B_{S_0}^{q-d_{0,0}-1} ,..., B_{S_{n-2}}^{q-d_{0,0}-1} B_{S_{n-2}}^{q-d_{0,0}-1} \end{pmatrix}$$

Po $p k_1$ -krotnej konkatencji słowa x_0 otrzymujemy:

$$\text{ext}_q(A \cup B) f_{x_0^{p k_1}} =$$

$$\begin{pmatrix} A_{S_0}^{q-d_{1,1}} A_{S_0}^{q-d_{1,1}} ,..., A_{S_{m-2}}^{q-d_{1,1}} A_{S_{m-2}}^{q-d_{1,1}} ,..., A_{S_0}^{q-d_{1,1}-1} A_{S_0}^{q-d_{1,1}-1} ,..., A_{S_{m-2}}^{q-d_{1,1}-1} A_{S_{m-2}}^{q-d_{1,1}-1} \\ B_{S_0}^{q-d_{1,1}} B_{S_0}^{q-d_{1,1}} ,..., B_{S_{n-2}}^{q-d_{1,1}} B_{S_{n-2}}^{q-d_{1,1}} ,..., B_{S_0}^{q-d_{1,1}-1} B_{S_0}^{q-d_{1,1}-1} ,..., B_{S_{n-2}}^{q-d_{1,1}-1} B_{S_{n-2}}^{q-d_{1,1}-1} \end{pmatrix}$$

gdzie: zgodnie ze sposobem wyznaczania $[m, n, q] = [[m, n], q] = [p, q]$:

$d_{1,1} = q - b_{0,0} - k_1 p$; $b_{1,1} = p - d_{1,1}$

Po $\frac{qt}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ext_q(A \cup B) f_{\frac{qt}{x_0^2}} = \begin{pmatrix} A S_0^{q-d_{t-1,t-1}} & A S_0^{q-d_{t-1,t-1}} & \dots, & A S_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}} & A S_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}} & \dots, & A S_0^{q-d_{t-1,t-1}-1} & A S_0^{q-d_{t-1,t-1}-1} & \dots, \\ A S_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}-1} & A S_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}-1} & B S_0^{q-d_{t-1,t-1}} & B S_0^{q-d_{t-1,t-1}} & \dots, & B S_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}} & B S_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}} & \dots, \\ B S_0^{q-d_{t-1,t-1}-1} & B S_0^{q-d_{t-1,t-1}-1} & \dots, & B S_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}-1} & B S_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}-1} \end{pmatrix}$$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania $[m, n, q]$:

$$d_{t-1,t-1} = q - b_{t-2,t-2} - kp = 0$$

Dla $d_{t-1,t-1} = 0$ możemy napisać przekształcenie $ext_q(A \cup B) f_{\frac{qt}{x_0^2}}$ w następującej postaci:

$$ext_q(A \cup B) f_{\frac{qt}{x_0^2}} = \begin{pmatrix} A S_0^0 & A S_0^0 & \dots, & A S_{m-2}^0 & A S_{m-2}^0 & \dots, & A S_0^{q-1} & A S_0^{q-1} & \dots, & A S_{m-2}^{q-1} & A S_{m-2}^{q-1} \\ B S_0^0 & B S_0^0 & \dots, & B S_{n-2}^0 & B S_{n-2}^0 & \dots, & B S_0^{q-1} & B S_0^{q-1} & \dots, & B S_{n-2}^{q-1} & B S_{n-2}^{q-1} \end{pmatrix}$$

Po σ_0 i $\frac{qt}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ext_q(A \cup B) f_{\frac{qt}{\sigma_0 x_0^2}} = \begin{pmatrix} A S_1^1 & A S_1^1 & \dots, & A S_{m-1}^1 & A S_{m-1}^1 & \dots, & A S_1^0 & A S_1^0 & \dots, & A S_{m-1}^0 & A S_{m-1}^0 \\ B S_1^1 & B S_1^1 & \dots, & B S_{n-1}^1 & B S_{n-1}^1 & \dots, & B S_1^0 & B S_1^0 & \dots, & B S_{n-1}^0 & B S_{n-1}^0 \end{pmatrix}$$

Po σ_0^q i $\frac{qt}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy

$$ext_q(A \cup B) f_{\frac{qt}{\sigma_0^q x_0^2}} = \begin{pmatrix} A S_1^0 & A S_1^0 & \dots, & A S_{m-1}^1 & A S_{m-1}^1 & \dots, & A S_1^{q-1} & A S_1^{q-1} & \dots, & A S_{m-1}^{q-1} & A S_{m-1}^{q-1} \\ B S_1^0 & B S_1^0 & \dots, & B S_{n-1}^0 & B S_{n-1}^0 & \dots, & B S_1^{q-1} & B S_1^{q-1} & \dots, & B S_{n-1}^{q-1} & B S_{n-1}^{q-1} \end{pmatrix}$$

Po σ_0^{q+1} i $\frac{qt}{2}$ – konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ext_q(A \cup B) f_{\frac{qt}{\sigma_0^{q+1} x_0^2}} = ext_q(A \cup B) f_{\frac{qt}{\sigma_0 x_0^2}} = ext_q(A \cup B) f_{\sigma_0}$$

Z przytoczonych powyżej rozważań opartych na sposobie wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności liczba dotychczas wygenerowanych przekształceń wynosi $[m, n, q]$. Dla pozostałych przekształceń otrzymujemy:

$$ext_q(A \cup B) f_{\sigma_0 x_0^2}^{qt} = ext_q(A \cup B) f_{\sigma_0 \sigma_0}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$ext_q(A \cup B) f_{\sigma_0^q x_0^2}^{qt} = ext_q(A \cup B) f_{\sigma_0^{q+1}}$$

Stąd liczba wykonywanych przekształceń jest równa $q[m, n, q]$. Identyczną liczbę przekształceń uzyskamy rozpoczynając przekształcenia zbioru stanów $ext_q(A \times B) S$ rozszerzenia stanowego sumy prostej od litery σ_1 . Zatem otrzymujemy wzór 1.

C.B.D.O.

4. WNIOSKI

Dalsze prace powinny być kontynuowane przy wyznaczaniu złożoności półgrup charakterystycznych automatów asynchronicznych spójnych. Szczegółowe rozpatrywanie klas automatów asynchronicznych silnie spójnych i spójnych wynika z powszechnego stosowania tych klas automatów w realizacjach technicznych cyfrowych układów sterujących. Wykorzystując teorię automatów możemy oszacować lub obliczyć złożoność półgrup charakterystycznych automatów. Ma to istotny wpływ na oszacowanie złożoności programów i czasu wizualizacji stanów automatów. Wykorzystując narzędzia programistyczne PsoC Expres mikrosystemu cyfrowego możemy przedstawić model sterowania pojazdu szynowego w postaci grafu automatu (maszyny stanowej) i realizować program w oparciu o sporządzony wcześniej graf automatu. Umożliwia to analizę graficzną zjawisk podczas symulacji sterowania pojazdem szynowym.. Mikrosystemy cyfrowe stosowane są obecnie do sterowania hamulców (tablic pneumatycznych) w lokomotywach i jednostkach elektrycznych.

5. BIBLIOGRAFIA

- [1] Bocian S.: *Złożoność półgrupy charakterystycznej automatów asynchronicznych i ich rozszerzeń*, Prace Instytutu Podstaw Informatyki Polskiej Akademii Nauk nr 552, Warszawa, 1984.
- [2] Bocian S., Mikołajczak.: *Computational aspect of assigning characteristic semigroup asynchronous automata and their extensions*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai nr 44, Amsterdam, New York, Budapest, 1985.
- [3] Bocian S.: *Rozprawa doktorska*, Politechnika Poznańska, 1986.
- [4] Bocian S.: *The complexity of semigroup characterization of asynchronous strongly connected automaton and their extensions*, Computational topology and geometry and computation in teaching mathematic, Universal de Sevilla, 1987.
- [5] Bocian S.: *A new method of calculating the smallest common multiple*, Computational topology and geometry and computation in teaching mathematic, Universal de Sevilla, 1987.

- [6] Bocian S.: *Nowy sposób wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych, jako model matematyczny automatu w technice komputerowej*, Pojazdy szynowe 1/2002.
- [7] Bocian S.: *Złożoność półgrupy charakterystycznej automatów asynchronicznych silnie spójnych ustalonych analogów ich rozszerzeń związanych z izomorfizmami*, TRANSCOMP - XIII INTERNATIONAL CONFERENCE COMPUTER SYSTEMS AIDED SCIENCES, INDUSTRY AND TRANSPORT, Zakopane 2009.
- [8] Bocian S.: *Nowy sposób wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych*, OR – 9834 (praca nie publikowana).

***Praca wykonana w ramach Projektu Badawczego KBN nr N N509 398236
„Mikrosystemy cyfrowe do inteligentnego, rozproszonego i współbieżnego
sterowania pojazdami szynowymi.”***