

GRABSKI Franciszek¹

SEMI-MARKOWSKI PROCES DECYZYJNY JAKO MODEL OPTYMALIZACJI PROCESU EKSPLOATACJI STATKU

W pracy zostało przedstawione zagadnienie optymalizacji procesu eksploatacji statku. Do matematycznego opisu i rozwiązania problemu została wykorzystana teoria semi-markowskich procesów decyzyjnych. Wykorzystano model decyzyjnego procesu decyzyjnego w nieskończonym przedziale czasu.

SEMI-MARKOV DECISION PROCESS AS AN OPTIMIZATION MODEL OF A SHIP'S OPERATION

A problem of optimization of a ship's operation is discussed in the paper. To describe and solve this problem, a semi-Markov decision processes theory is applied. The infinite duration semi-Markov decision process as a model of the sea transport operation is constructed. An algorithm which allows to compute the optimal strategy of the operation in this paper is presented.

1. WSTĘP

Decyzyjne (sterowane) procesy semi-markowskie stanowią dogodny aparat matematyczny formułowania i rozwiązywania zagadnień decyzyjnych związanych z eksploatacją obiektów.

Literatura dotycząca decyzyjnych procesów semi-markowskich jest szeroka. Do kluczowych prac można zaliczyć pracę Jewella [6], Howarda [5], Maina i Osakiego [9], oraz Gercbacha [2]. Decyzyjne procesy semi-markowskie rozpatrywane były również w pracy [3].

Decyzyjny proces semi-markowski, to proces SM $\{X(t) : t \geq 0\}$, którego realizacja zależy od podejmowanych decyzji w chwili początkowej τ_0 oraz chwilach zmian stanów $\tau_1, \dots, \tau_n, \dots$. Decyzję w chwili τ_n , gdy $X(\tau_n) = i$, oznaczamy symbolem $d_i(\tau_n)$. Przyjmujemy, że zbiór decyzji w każdym stanie i jest skończony. Zbiór ten oznaczmy symbolem D_i . Podjęcie decyzji oznacza wybór i -tego wiersza jądra procesu, który

¹Akademia Marynarki Wojennej

określa probabilistyczny mechanizm ewolucji procesu w przedziale $[\tau_n, \tau_{n+1})$. Wybór dokonywany jest ze zbioru

$$\{Q_{ij}^{(k)}(t) : t \geq 0, k \in D_i, i, j \in S\} \quad (1)$$

gdzie

$$Q_{ij}^{(k)}(t) = p_{ij}^{(k)} F_{ij}^{(k)}(t) \quad (2)$$

natomiast zbiór stanów S jest skończony. Przyjmujemy $S = \{1, 2, \dots, N\}$.

Decyzja $d_i(\tau_n) = k \in D_i$ oznacza, że proces semi-markowski ewoluje w ten sposób, że zgodnie z rozkładem $(p_{ij}^{(k)} : j \in S)$ zostaje wylosowany stan procesu j , do którego następuje przejście w chwili τ_{n+1} , przy czym długość przedziału $[\tau_n, \tau_{n+1})$ zostaje wylosowana zgodnie z rozkładem określonym przez dystrybuantę $F_{ij}^{(k)}(t)$.

Ciąg

$$d = \{(d_1(\tau_1), \dots, d_N(\tau_n)) : n = 0, 1, 2, \dots\} \quad (3)$$

nazywamy *strategią*. Wyrazami tego ciągu są wektory, których składowymi są decyzje podejmowane w określonych stanach, w chwilach ich zmian.

Strategię d nazywamy *markowską*, jeżeli dla każdego stanu $i \in S$, oraz każdej chwili zmiany stanu τ_n , $n = 1, 2, \dots$ decyzja $d_i(\tau_n) \in D_i$ nie zależy od realizacji procesu do chwili τ_n . Jeżeli ta decyzja nie zależy również od n , tzn. $d_i(\tau_n) = d_i$, to strategię nazywamy *stacjonarną*. Wówczas decyzyjny proces semi-markowski jest procesem jednorodnym. Optymalizacja decyzyjnego procesu semi-markowskiego polega na wyborze takiej strategii, dla której funkcja stanowiąca kryterium optymalizacji przyjmuje wartość ekstremalną, (maksymalną lub minimalną). Przedstawimy jeden z wariantów konstruowania tego rodzaju funkcji.

2. OPTIMALIZACJA DECYZJI W PRZEDZIALE NIESKOŃCZONYM

Sformułujemy zagadnienie optymalizacji procesu semi-markowskiego w przedziale $[0, \infty)$. Niech

$$r_{ij}^{(d_i)}(x), \quad i, j \in S, d_i \in D_i \quad (4)$$

oznacza dochód uzyskany w jednostce czasu przedziału trwania stanu i , pod warunkiem, że w chwili zmiany tego stanu nastąpi przejście do stanu j , przy czym w chwili wejścia do stanu i została podjęta decyzja $d_i \in D_i$. Dodajmy, że stratę będziemy interpretować jako ujemny dochód. Dochód $r_{ij}^{d_i}(x)$ jest funkcją czasu x liczonego od chwili zmiany stanu przejścia do stanu i . Termin dochód jest umowny; może on oznaczać dowolną ale stosowną do rozpatrywanego zagadnienia, wielkość fizyczną. Funkcja

$$R_{ij}^{(d_i)}(t) = \int_0^t r_{ij}^{(d_i)}(x) dx, \quad i, j \in S, d_i \in D_i \quad (5)$$

oznacza dochód uzyskany do chwili t licząc od chwili wejścia do stanu i ale przed przejściem do stanu j .

Symbolem

$$b_{ij}^{(k)}, \quad i, j \in S, d_i \in D_i \quad (6)$$

oznaczamy dodatkowy stały dochód (premie), wynikający ze zmiany stanu z i na j .

Liczba

$$U_i^{(d_i)} = \sum_{j \in S} \int_0^\infty (R_{ij}^{(d_i)}(t) + b_{ij}^{(d_i)}) dQ_{ij}^{(d_i)}(t) \quad (7)$$

oznacza oczekiwany dochód uzyskany w pojedynczym przedziale realizacji stanu i , gdy w chwili początkowej realizacji tego stanu została podjęta decyzja $d_i(\tau_0) = d_i \in D_i$.

Funkcja

$$g(d) = \frac{\sum_{i \in S} \pi_i^{(d_i)} U_i^{(d_i)}}{\sum_{i \in S} \pi_i^{(d_i)} E[T_i^{(d_i)}]} \quad (8)$$

oznacza dochód na jednostkę czasu w wyniku długiej eksploatacji obiektu. Liczby

$$\pi_i^{(d_i)}, \quad i \in S \quad (9)$$

stanowią rozkład stacjonarny włożonego łańcucha Markowa w proces semi-markowski określony przez jądro

$$Q^{(d)}(t) = [Q_{ij}^{(d_i)}(t) : t \geq 0, i, j \in S]$$

Oznacza to, że dla każdej decyzji $d_i \in D_i$ te prawdopodobieństwa spełniają układ równań liniowych

$$\sum_{i \in S} \pi_i^{(d_i)} p_{ij}^{(d_i)} = \pi_j^{(d_j)}, \quad j \in S, \quad \sum_{i \in S} \pi_i^{(d_i)} = 1 \quad (10)$$

gdzie

$$p_{ij}^{(d_i)} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij}^{(d_i)}(t), \quad i, j \in S \quad (11)$$

Liczba

$$E[T_i^{(d_i)}] = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t dG_i^{(d_i)}(t), \quad i \in S, d_i \in D_i \quad (12)$$

jest wartością oczekiwaną czasu trwania stanu i dla decyzji $d_i \in D$.

Strategię stacjonarną d^* nazywamy optymalną jeżeli maksymalizuje ona jednostkowy dochód z eksploatacji obiektu:

$$g(d^*) = \max_d [g(d)]$$

Przedstawimy algorytm Howarda [5] pozwalający znaleźć strategię optymalnej.

Algorytm

Dane

1. Zbiór decyzji D_i , $i \in S = \{1, 2, \dots, N\}$
2. Zbiór funkcji definiujących procesy semi-markowskie
 $\{Q_{ij}^{(d_i)}(t) : t \geq 0, d_i \in D_i, i, j \in S\}$
3. Zbiory zysków jednostkowych
 $\{r_{ij}^{(d_i)}(x) : x \geq 0, d_i \in D_i, i, j \in S\}, \quad \{b_{ij}^{(d_i)}, d_i \in D_i, i, j \in S\}$

Procedury obliczeń

1. Dla każdego $d_i \in D_i, i, j \in S$ obliczamy

$$p_{ij}^{(d_i)} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij}^{(d_i)}(t)$$

$$E[T_{ij}^{(d_i)}] = \sum_{j \in S} \int_0^\infty t dQ_{ij}^{(d_i)}(t)$$

$$R_{ij}^{(d_i)}(t) = \int_0^t r_{ij}^{(d_i)}(x) dx$$

$$U_i^{(d_i)} = \sum_{j \in S} \int_0^\infty (R_{ij}^{(d_i)}(t) + b_{ij}^{(d_i)}) dQ_{ij}^{(d_i)}(t)$$

2. Obliczanie względnych wag

Dla strategii $d = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ obliczamy względne wagi

$w_1, w_2, \dots, w_{N-1}$ oraz dochód $g(d)$ rozwiązując układ równań

$$g(d)E[T_{ij}^{(d_i)}] + w_i = U_i^{(d_i)} + \sum_{j \in S} p_{ij}^{(d_i)} w_j, \quad i \in S$$

gdzie

$$w_N = 0$$

3. Poprawianie rozwiązania

Dla każdego $i \in S$ konstruujemy zbiór decyzji

$$\Delta_i = \left\{ d_i \in D_i : \frac{U_i^{(d_i)} + \sum_{j \in S} p_{ij}^{(d_i)} w_j - w_i}{E[T_{ij}^{(d_i)}]} > g(d) \right\}$$

Jeżeli dla każdego $i \in S$ zbiór $\Delta_i = O$ to strategia $d = \{(d_1, d_2, \dots, d_N)\}$ jest optymalna. Jeżeli $\Delta_i \neq O$ to wektor $(d_1, d_2, \dots, d_N)$ zastępujemy wektorem $\delta' = (\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_N)$ gdzie

$$\delta'_i = \delta_i, \text{ gdy } \Delta_i = O \quad i \quad \delta'_i \in \Delta_i, \text{ gdy } \Delta_i \neq O$$

Następnie powtarzamy procedury 2 i 3. Po skończonej liczbie kroków otrzymamy rozwiązanie optymalne

3. SEMI-MARKOWSKI PROCES DECYZYJNY JAKO MODEL OPTIMALIZACJI PROCESU EKSPLOATACJI STATKU

3.1 Opis i założenia

Rozważmy prosty cykliczny proces eksploatacji statku składający się z czterech kolejnych etapów: postój, rozładunek i załadunek w porcie A, rejs z portu A do portu B, postój, rozładunek i załadunek w porcie B, rejs z portu B do portu A. Czas trwania każdego etapu, a z tym związane koszty i dochody zależą od podejmowanych na każdym etapie decyzji.

Zakładamy, że czas trwania niezakłóconego i -tego etapu procesu eksploatacji dla decyzji $d_i \in D_i$ jest nieujemną zmienną losową $\xi_i^{(k)}$ o rozkładzie określonym przez dystrybuantę

$$F_{\xi_i^{(d_i)}}(t) = P(\xi_i^{(d_i)} \leq t), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad d_i \in D_i$$

Przyjmujemy, że rejs z portu A do portu B oraz z portu B do portu A może być z różnych powodów zakłócony. Wówczas czas trwania rejsu $\zeta_i^{(k)}$ jest nieujemną zmienną losową o dystrybuancie

$$F_{\zeta_i^{(d_i)}}(t) = P(\zeta_i^{(d_i)} \leq t), \quad \delta_i \in D_i, \quad i = 5, 6$$

Przyjmujemy, że czas od chwili rozpoczęcia rejsu do początku zaburzenia jest niezależną od decyzji zmienną ν o rozkładzie wykładniczym z parametrem β .

$$P(\nu \leq t) = 1 - e^{-\beta t}$$

Przyjmujemy, że wszystkie te zmienne losowe są wzajemnie niezależne.

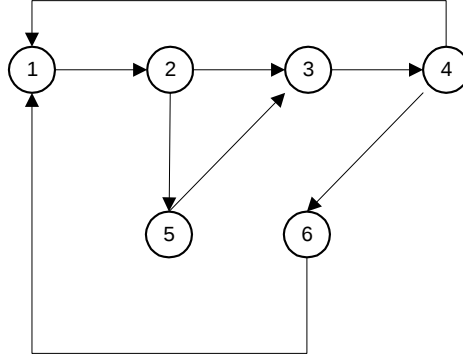
3.2 Model

Budowę modelu rozpoczynamy od określenia stanów procesu eksploatacji statku:

- 1 – postój rozładunek i załadunek w porcie A
- 2 – rejs z portu A do portu B bez zakłóceń
- 3 – postój rozładunek i załadunek w porcie B,
- 4 – rejs z portu B do portu A bez zakłóceń
- 5 – zakłócony rejs z portu A do portu B

6 – zakłócony rejs z portu B do portu A

Możliwe zmiany stanów procesu eksploatacji statku są przedstawione na rysunku 1.



Rys.1. Graf zmian stanów procesu eksploatacji statku

Zgadzając się na duże uproszczenia jako model procesu eksploatacji statku przyjmujemy proces semi-markowski ([3], [4], [5], [8], [10]) o jądrze

$$Q^{(\delta)}(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12}^{(d_1)}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{23}^{(d_2)}(t) & 0 & Q_{25}^{(d_2)}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{34}^{(d_3)}(t) & 0 & 0 \\ Q_{41}^{(d_4)}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{46}^{(d_4)}(t) \\ 0 & 0 & Q_{53}^{(d_5)}(t) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{61}^{(d_6)}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Korzystając z założeń obliczamy niezerowe elementy tej macierzy.

$$Q_{12}^{(d_1)}(t) = P(\xi_1^{(d_1)} \leq t) = F_{\xi_1^{(d_1)}}^{(d_1)}(t), \quad d_1 \in D_1$$

$$Q_{23}^{(d_2)}(t) = P(\xi_2^{(d_2)} \leq t, \xi_2^{(d_2)} < \nu) = \int_0^t e^{-\beta x} dF_{\xi_2^{(d_2)}}(x), \quad d_2 \in D_2$$

$$Q_{25}^{(d_2)}(t) = P(\nu \leq t, \xi_2^{(d_2)} > \nu) = \beta \int_0^t [1 - F_{\xi_2^{(d_2)}}(x)] e^{-\beta x} dx, \quad d_2 \in D_2$$

$$Q_{34}^{(d_3)}(t) = P(\xi_3^{(d_3)} \leq t) = F_{\xi_3^{(d_3)}}(x), \quad d_3 \in D_3$$

$$Q_{41}^{(d_4)}(t) = P(\xi_4^{(d_4)} \leq t, \xi_4^{(d_2)} < \nu) = \int_0^t e^{-\beta x} dF_{\xi_4^{(d_4)}}(x), \quad d_4 \in D_4$$

$$Q_{46}^{(d_4)}(t) = P(\nu \leq t, \xi_2^{(d_4)} > \nu) = \beta \int_0^t [1 - F_{\xi_2^{(d_4)}}(x)] e^{-\beta x} dx, \quad d_4 \in D_4$$

$$Q_{53}^{(d_5)}(t) = P(\xi_5^{(d_5)} \leq t), \quad d_5 \in D_5, \quad Q_{61}^{(d_6)}(t) = P(\xi_6^{(d_6)} \leq t), \quad d_6 \in D_6$$

Mając jądro procesu semi-markowskiego możemy łatwo obliczyć elementy macierzy prawdopodobieństw przejścia procesu semi-markowskiego:

$$p_{ij}^{(d_i)} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij}^{(d_i)}(t), \quad t \geq 0$$

Zbudowanie modelu decyzyjnego wymaga określenia zbiorów decyzji D_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, oraz związanych z nimi dochodów. Dla uproszczenia modelu przyjmijmy, że wszystkie zbiory decyzji D_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ są dwuelementowe: $D_i = \{1, 2\}$ $i = 1, 2, \dots, 6$.

Przyjmujemy

$$r_{ij}^{(k)}(x) = r_{ij}^{(k)} \in R, \quad k \in D_i, \quad i, j \in S = \{1, 2, \dots, 6\}$$

Na podstawie związków (5) i (7) otrzymujemy

$$R_{ij}^{(k)}(t) = r_{ij}^{(k)} t, \quad i, j \in S, \quad k \in D_i$$

oraz

$$U_i^{(k)} = \sum_{j \in S} p_{ij}^{(k)} (r_{ij}^{(k)} m_{ij}^{(k)} + b_{ij}^{(k)})$$

gdzie $m_{ij}^{(k)} = E(T_{ij}^{(k)})$ oznacza oczekiwany czas trwania stanu i gdy następnym stanem będzie stan j .

4. WNIOSKI

Formułując zagadnienie optymalizacji procesu eksploatacji obiektu musimy określić w każdym stanie eksploatacyjnym możliwe decyzje od których zależą parametry i charakterystyki procesu eksploatacji. Jeżeli kryterium optymalizacji jest dochód przypadający na jednostkę czasu eksploatacji obiektu, to dla każdej decyzji w każdym stanie muszą być podane jednostkowe zyski i straty oraz dodatkowe profity a także oczekiwane warunkowe czasy trwania stanów eksploatacyjnych. Jeżeli charakter rzeczywistego procesu eksploatacji obiektu pozwala przypuszczać, że spełnione są warunki definicji procesu semi-markowskiego, to można skonstruować semi-markowski model procesu eksploatacji obiektu budując jądro procesu. Zbudowany semi-markowski model procesu eksploatacji oraz przedstawiony algorytm pozwala wyznaczyć optymalną strategię eksploatacji.

5. BIBLIOGRAFIA

- [1] Aven T.: Risk Analysis. Wiley.2008
- [2] Gercbach J.B. Modeli profilaktiki. Sovetsko Radio, Moskva 1969
- [3] Grabski F.: Teoria semi-markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych. Zeszyty Naukowe AMW, nr 75 A, Gdynia 1982.
- [4] Grabski F.: Semi-markowskie modele niezawodności i eksploatacji. Polska Akademia Nauk, IBS.Warszawa 2002. Seria: Badania Systemowe , tom 30.
- [5] Howard R.A.: Research in semi -Markovian decision structures. J. Oper. Res. Soc. Japan, 1964, 6, nr 4, p.163-199.
- [6] Howard R.A.: Dynamic Probabilistic Systems. Volume II Semi-Markov and Decision Processes. John Wiley, New York, London, Sydney, Toronto 1971.
- [7] Jewell W.S. Markov-renewal programming. Operation Research 11,1963, p.938-971.
- [8] Koroluk V.S., Turbin A.F: Polumarkovskije processy i ich priłożenija. Naukova Dumka, Kijev 1976.
- [9] Mine H., Osaki S.: Markovian decision processes. AEPCI, Nev York 1970.
- [10] Silvestrov D.S.: Polumarkovskije processy s diskretnym mnożestwom sostojanij. Sovetskoe Radio, Moskva 1980.