ATAMAN Magdalena[1]
SZCZEŚNIAK Wacław[2]

Wybrane zadania dynamiki analitycznej z zastosowaniem prawa zachowania momentu pędu. Część II

mechanika teoretyczna i analityczna,
pęd, moment pędu (kręt), równania ruchu układów

Streszczenie

W referacie rozwiązano kilka trudniejszych zadań, których rozwiązania opierają się na podstawowym prawie dynamiki klasycznej, jakim jest prawo zachowania momentu pędu. Podano rozwiązania tych zadań, a wyniki rozwiązań szczegółowo przeanalizowano.

SOLUTION OF SELECTED PROBLEMS OF THE ANALYTICAL DYNAMICS USING LAWS OF CONSERVATION OF MOMENTUM AND MOMENT OF MOMENTUM. PART II

Abstract

In the paper some difficult problems, which solutions are based on a basic law of classical dynamics, which is the law of conservation of moment of momentum are solved. The detailed solutions of the problems are presented and the results are analysed.

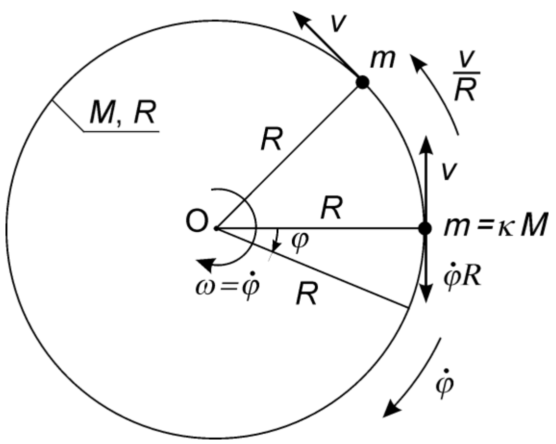
1. WSTĘP

Prawa zachowania pędu, momentu pędu (krętu), energii kinetycznej i energii mechanicznej stanowią podstawę teoretyczną mechaniki ogólnej i technicznej. W referacie podano rozwiązania kilku trudniejszych zadań z dynamiki teoretycznej, w których wykorzystuje się prawo zachowania momentu pędu.

2. ZASTOSOWANIE PAWA ZACHOWANIE KRĘTU W RUCHU ZŁOŻONYM

2.1 Przykład 1

Obręcz o masie całkowitej M i promieniu R spoczywa na idealnie gładkiej, poziomej podłodze i może się swobodnie obracać dookoła swojego środka masy O, jak na rysunku 1. Punkt materialny o masie $m = \kappa M$ znajduje się na obwodzie obręczy i w pewnej chwili zaczyna się poruszać po jej obwodzie ze znana prędkością v. Wyznaczyć kąt obrotu obręczy w przypadku kiedy punkt m przebędzie cały obwód obręczy i znajdzie się w punkcie wyjściowym z którego wyszedł.



Rys. 1. Ruch punktu materialnego $m = \kappa M$ po obwodzie obręczy obracającej się dookoła środka O

[1]Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16, tel.: +48 22 234 64 70, e-mail: m.ataman@.il.pw.edu.pl
[2]Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16, tel.: +48 22 234 65 07, e-mail: w.szczesniak@.il.pw.edu.pl

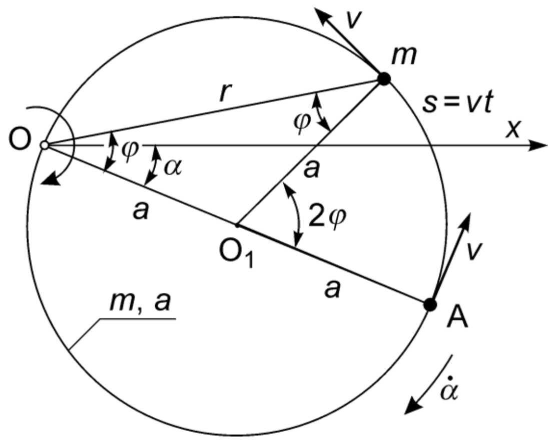
Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 1 oraz zgodnie z prawem zachowania momentu pędu czyli krętu obręcz zacznie się obracać zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Prawo zachowania momentu pędu prowadzi zatem do równania:

$$M\ R^2\ \dot{\varphi} - \kappa\ M\left(\frac{v}{R} - \dot{\varphi}\right)R^2 = 0, \qquad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{\kappa\ v}{R\left(1+\kappa\right)},$$
$$\varphi = \int_0^{2\pi R} \frac{\kappa\ v}{R\left(1+\kappa\right)}\,d\,t = \frac{2\ \pi\ \kappa}{1+\kappa}. \tag{1}$$

W szczególnym przypadku $M = m = \kappa\ M,\quad \kappa = 1$, z (1) otrzymujemy $\varphi = \pi$.

2.2 Przykład 2

Obręcz o masie całkowitej m i promieniu a spoczywa na idealnie gładkim stole. Obręcz jest zamocowana przegubowo do stołu w punkcie O swojego obwodu i może się swobodnie obracać względem O po powierzchni stołu. Punkt materialny również o masie m, początkowo znajduje się na drugim końcu średnicy przechodzącej przez przegub O. W pewnej chwili punkt m zaczął poruszać się po obwodzie obręczy z zadaną prędkością v względem obręczy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Wyznaczyć kąt o jaki przesuwać się będzie obręcz w czasie t podczas ruchu względnego punktu m po jej obwodzie.



Rys. 2. Punkt materialny m w ruchu po obwodzie obręczy mogącej obracać się swobodnie dookoła przegubu O. *Początkowo średnica* OA *była pozioma i pokrywała się z osią* O*x*

Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 2 oraz w zgodzie z prawem zachowania momenty pędu czyli krętu , przy ruchu punktu m przeciwnie do ruchu wskazówek zegara obręcz zacznie obracać się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Początkowo punkt materialny m znajdował się na średnicy Ox. Prawo zachowania momentu pędu prowadzi do równania.

$$2\,m\,a^2\ \dot{\alpha} - m\left(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}\right)r^2 = 0. \tag{2}$$

Kąt φ, jego pochodną w czasie $\dot{\varphi}$ oraz zmienny promień r określimy z prostych relacji kinematycznych i geometrycznych zgodnie z oznaczeniami rysunku 2. Mamy zatem:

$$\varphi = \frac{v\,t}{2\,a}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\left(\varphi\right) = \frac{v}{2\,a}, \qquad r = 2\,a\cos\alpha, \qquad r^2 = 4\,a^2\cos^2\alpha. \tag{3}$$

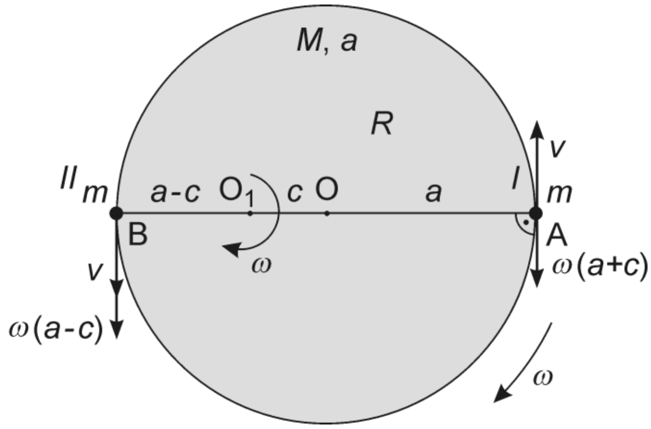
Wstawiając (3) do (2) otrzymujemy:

$$\omega = \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{r^2\dot{\varphi}}{2\,a^2 + r^2}, \qquad d\alpha = \frac{r^2\dot{\varphi}}{2\,a^2 + r^2}\,dt,$$
$$\alpha = \int \frac{r^2\dot{\varphi}}{2\,a^2 + r^2}\,dt = \int \frac{v}{2a}\,\frac{4\,a^2\cos^2\dfrac{v\,t}{2\,a}}{2\,a^2 + 4\,a^2\cos^2\dfrac{v\,t}{2\,a}}\,dt, \qquad \alpha = \frac{v\,t}{2\,a} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,tg\left(\frac{v\,t}{2\,a}\right)\right] + C, \qquad C = 0. \tag{4}$$

Stała C musi być równa zeru, bowiem przy $t=0$ jest $\alpha=0$. Ostatni ze wzorów (4) jest odpowiedzią.

2.3 Przykład 3

Krążek o masie całkowitej M i promieniu a spoczywa na poziomym, idealnie gładkim stole. Krążek może się obracać dookoła punktu O_1 odległego o dany odcinek c od środka krążka. Punkt materialny o masie m znajduje się na obwodzie krążka w położeniu I w punkcie A, jak na rysunku 3. W pewnej chwili punkt m zaczął poruszać się po obwodzie krążka ze stałą zadaną prędkością v względem krążka. Obliczyć prędkość kątową krążka w tym położeniu. Jaka będzie prędkość kątowa $\tilde{\omega}$ krążka w położeniu II po przebyciu drogi określonej przez kąt równy π ?



Rys. 3. Układ prędkości w położeniu I i II punktu materialnego m na obwodzie krążka

Jeśli krążek znajduje się w punkcie A na obwodzie w położeniu I, to prawo zachowania momentu pędu względem punktu O_1 zapisujemy w następujący sposób:

$$M\left(\frac{a^2}{2}+c^2\right)\omega = m\,v\left(a+c\right)-m\left(a+c\right)^2\omega \quad\Rightarrow\quad \omega=\frac{m\,v\left(a+c\right)}{M\left(\frac{a^2}{2}+c^2\right)+m\left(a+c\right)^2}. \tag{5}$$

Jeśli punkt materialny m będzie w punkcie B, jak na rysunku 3, to równanie krętu zapiszemy w następujący sposób:

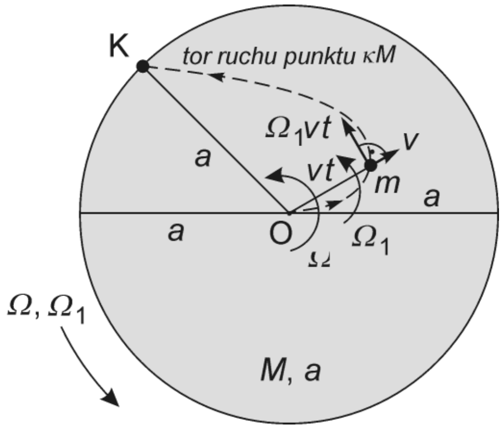
$$M\left(\frac{a^2}{2}+c^2\right)\tilde{\omega} = m\,v\left(a-c\right)-m\left(a-c\right)^2\tilde{\omega} \quad\Rightarrow\quad \tilde{\omega}=\frac{m\,v\left(a-c\right)}{M\left(\frac{a^2}{2}+c^2\right)+m\left(a-c\right)^2}. \tag{6}$$

2.4 Przykład 4

Jednorodny sztywny krążek o masie całkowitej M i promieniu a spoczywa na idealnie gładkim, poziomym stole i może swobodnie obracać się dookoła osi prostopadłej do krążka i przechodzącej przez przegub O, będący środkiem masy krążka. Krążek obraca się zeznaną prędkością kątową, wraz z punktem materialnym κM znajdującym się początkowo w punkcie środkowym krążka. W pewnej chwili punkt materialny κM zaczął poruszać się ze stałą prędkością względną v, względem krążka, po jego promieniu a. Wykazać, że jeśli punkt materialny dotrze do obwodu krążka, to krążek obróci się o kąt $\varphi=\frac{a\,\Omega}{v\sqrt{2\kappa}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2\kappa}\right)$.

Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 4, punkt materialny κM jest w ruchu złożonym. Podczas ruchu względnego punktu materialnego wzdłuż promienia a, prędkość kątowa krążka ulegnie zmianie i przy odległości $v\,t$ od środka krążka niechaj wynosi Ω_1. Prawo zachowania momentu pędu (krętu) względem punktu środkowego krążka O prowadzi do równania:

$$\frac{1}{2}M\,a^2\,\Omega=\frac{1}{2}M\,a^2\,\Omega_1+\kappa\,M\,v^2\,t^2\,\Omega_1 \quad\Rightarrow\quad \Omega_1=\frac{\Omega\,a^2}{a^2+2\kappa\,v^2\,t^2}. \tag{7}$$



Rys. 4. Ruch złożony punktu materialnego κM. *Zmienny promień* $r = vt$, *zmienna prędkość kątowa* Ω_1, *stała początkowa prędkość kątowa* Ω. *W chwili początkowej punkt* m *znajdował się w środku krążka* O

Całkując wyrażenie $(7)_2$ na Ω_1 w granicach od zera do $v\,t = a$ otrzymujemy odpowiedź na sformułowane w tekście zadania polecenie:

$$\Omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \rightarrow \qquad d\varphi = \Omega_1\, dt, \qquad \varphi = \int \Omega_1\, dt, \qquad \varphi = \int \frac{\Omega\, a^2}{a^2 + 2\,\kappa\, v^2\, t^2}\, dt,$$
$$\varphi = \frac{a\,\Omega}{v\,\sqrt{2\kappa}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{v\,t\,\sqrt{2\kappa}}{a}\right), \qquad v\,t = a, \qquad \varphi = \frac{a\,\Omega}{v\,\sqrt{2\kappa}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2\kappa}\right). \tag{8}$$

Ostatni ze wzorów (8) stanowi odpowiedź w tym zadaniu.

3. WNIOSKI

W drugiej części opracowania podano rozwiązania czterech trudniejszych zadań z dynamiki analitycznej, w których również wykorzystano prawo zachowania momentu pędu i pojęcie prędkości sektorowej.

4. BIBLIOGRAFIA

[1] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych.* OW PW, Warszawa 2007.
[2] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna w zadaniach dla dociekliwych.* OW PW, Warszawa 2010.
[3] Szcześniak W.: *Dynamika analityczna i <<MATHEMATICA>>*. OW PW, Warszawa 2010.
[4] Timoshenko S.P., Young D.H.: *Engineering Mechanics*. *Statics*, *Dynamics*. McGraw-Hill Company, New York 1937, 1940, 1951, 1956.
[5] Routh E. *Dynamics of System of Rigid Bodies.* Part I and II. McMillan, London 1905.
[6] Routh E.: *A Treatise on Dynamics of a Particle.* Cambridge at the University Press 1898.
[7] Webster A.G.: *The Dynamics of Particles and of Rigid, Elastic and Fluid Bodies*. Leipzig, Teubner 1912.
[8] Smart E.H.: *Advanced Dynamics*. Vol. I and II. MacMillan, London 1951.
[9] Ziwet A.: *Elements of Theoretical Mechanics*. MacMillan, New York 1904.
[10] Love A.E.H.: *Theoretical mechanics*. Cambridge at the University Press 1921.
[11] Szcześniak W.: *Zbiór zadań z mechaniki teoretycznej. Kinematyka* 2011, *Statyka* 2008, *Dynamika* 1997, Warszawa OW PW.