Andrzej Chojnacki[1]
Wydział Cybernetyki Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawska Wyższa Szkoła Informatyki

Sieci pojemnościowe w modelowaniu procesów logistycznych

1. WPROWADZENIE

Główną przyczyną dużego zainteresowania metodami analizy sieciowej jest prostota interpretacji modeli sieciowych, które w postaci graficznej są łatwo zrozumiałe przez osoby niezwiązane bezpośrednio z badaniami operacyjnymi. Przykłady efektów osiąganych w praktyce po zastosowaniu metod analizy sieciowej są proste i przekonywujące. Modele sieciowe pozwalają opisać wiele istniejących systemów, nawet bardzo złożonych. Umożliwiają też dekompozycję takich systemów, wskazują na związki między podsystemami, są pomocne przy wyborze charakterystyk istotnych z punktu widzenia celu badań itp. Wiele metod analizy sieciowej wyróżnia się dużą efektywnością obliczeniową, znacznie wyższą niż metody rozwiązywania odpowiadających im zadań programowania matematycznego. Ma to tym większe znaczenie, iż wiele problemów badanych na gruncie analizy sieciowej ma charakter dyskretny, a ogólne metody rozwiązywania zadań kombinatorycznych odznaczają się wysoką złożonością obliczeniową.

Zalety analizy sieciowej wywołują stałe zapotrzebowanie na nowe modele sieciowe przeznaczone do rozwiązywania odpowiednich zagadnień praktycznych. Przykładowymi osiągnięciami w tym procesie są tzw. sieci uogólnione ze wzrostem lub zmniejszaniem się przepływu na łukach [8], sieci małych światów [10], sieci fraktalne [9], sieci z grafami przypadkowymi [4], przepływy wieloasortymentowe [5], sieci ewoluujące [1], sieci z ukrytymi zmiennymi [2] i inne szerzej przedstawione np. w [7]. W nurcie tych prac znajdują się również badania prezentowane w niniejszym artykule. Inspiracją do nich była analiza pewnych procesów logistycznych, między innymi transportowych z wykorzystaniem sieci kolejowej.

2. SIEĆ POJEMNOŚCIOWA I PRZEPŁYW

W literaturze zagadnienia przepływów w sieciach występują najczęściej w ujęciach, które pozwalają na ich następującą interpretację:

– sieć formalna jest modelem sieci transportowej, w której przemieszczana jest materia, energia, informacja itp. z pewną intensywnością stałą w czasie przesyłania;
– sieć formalna jest modelem sieci transportowej, w której przesyłane są niepodzielne porcje materii, informacji itp., przy czym ustalone są czasy ich przemieszczania na gałęziach sieci, a kolejne porcje mogą być przesyłane w stałych odstępach czasu;
– sieć formalna jest modelem sieci drogowej, po której poruszają się pojedyncze obiekty, przy czym ustalone są czasy ich przemieszczania się dla poszczególnych gałęzi i wierzchołków sieci; ruch każdego obiektu powoduje niedostępność pewnych elementów sieci dla ruchu innych obiektów.

Przedstawione w artykule sieci pojemnościowe mogą z kolei mieć interpretację następującą:

– sieć formalna jest modelem sieci drogowej;
– poruszają się po niej obiekty punktowe;
– ustalone są minimalne czasy pokonywania gałęzi sieci przez te obiekty;
– liczba obiektów, które jednocześnie mogą znajdować się na gałęzi sieci (niekoniecznie będąc w ruchu), jest ograniczona dla każdej gałęzi.

[1] andrzej.chojnacki@wat.edu.pl

Kluczowym pojęciem w teorii przepływów w sieciach jest pojęcie przepustowości gałęzi interpretowanej jako zdolność do przemieszczania (transportowania) materii, energii, informacji itp. w jednostce czasu. Przez przyjęcie stałej przepustowości zakłada się więc jak gdyby stały (bez zahamowań) proces przemieszczania się określonego dobra. Właściwości takiej nie ma na przykład transport kolejowy, gdzie wzajemne uwarunkowania elementów sieci kolejowej mogą wymuszać zatrzymywania się pociągów, gdy pewien inny pociąg znajduje się na elemencie sieci kolejowej i niekoniecznie porusza. Elementy sieci kolejowej są scharakteryzowane liczbą pociągów, które na nich mogą jednocześnie przebywać, najczęściej wynoszącą jeden. Są więc dla nich ustalone wielkości, które mogą być intepretowane jako swego rodzaju pojemności. Sieć pojemnościowa jest to taka sieć formalna, której elementy scharakteryzowane są pojemnościami, określającymi ile maksymalnie obiektów punktowych może jednocześnie przebywać na tym elemencie.

Formalnie **sieć pojemnościowa** [3] jest to:

$$S = \left\langle G,\{a\},\{\tau, p\}\right\rangle \tag{1}$$

gdzie:

$G = \langle W, U, P\rangle$ - graf skończony, w którym W jest zbiorem wierzchołków, U - zbiorem gałęzi, a $P \subseteq W \times U \times W$ - relacją trójargumentową spełniającą warunki definiujące graf,

$a : W \to \{-1,0,1\}$ - funkcja wyróżniająca źródło x^p $\left(a\left(x^p\right)=1\right)$ oraz odpływ x^k $\left(a\left(x^k\right)=-1\right)$,

$\tau : U \to \Re^+$,($\Re^+$ jest zbiorem liczb rzeczywistych, w tym przypadku dodatnich, najczęściej w tym miejscu przyjmuje się zbiór liczb całkowitych dodatnich),

$p : U \to \boldsymbol{P}$,($\boldsymbol{P}$ jest zbiorem liczb całkowitych dodatnich).

Wartość $\tau(u)$ nazywa się (minimalnym) czasem pokonywania gałęzi $u \in U$, a liczbę całkowitą dodatnią $p(u)$ - pojemnością tej gałęzi.

Zakładamy przy tym, że graf G nie musi być unigrafem, stąd konieczność zdefiniowania go jako trójki uporządkowanej, w odróżnieniu od unigrafów skierowanych lub nieskierowanych, gdzie do ich definicji wystarczą pary uporządkowane. Potrzeba rozpatrywania takiej definicji grafu wynika dodatkowo z tego, że w dalszej części artykułu będą rozpatrywane grafy, które z założenia nie będą unigrafami.

Przepływ w tak zdefiniowanej sieci pojemnościowej w przedziale czasu $[0, TMAX]$ opisuje dopuszczalne przemieszczanie się obiektów punktowych po gałęziach sieci od źródła do odpływu w tym przedziale czasu. Może więc być opisany podaniem liczby N przemieszczających się obiektów, ich trasami i terminarzami. **Trasa** μ_n n-tego obiektu jest marszrutą skierowaną łączącą wierzchołki x^p oraz x^k, czyli:

$$\mu_n = \left\langle x_n^0, u_n^1, x_n^1, \dots \dots, u_n^{L_n}, x_n^{L_n}\right\rangle \tag{2}$$

przy czym:

$$x_n^0 = x^p;\, x_n^{L_n} = x^k;\, x_n^l \in W\left(l = \overline{0, L_n}\right); u_n^l \in U; \left\langle x_n^{l-1}, u_n^l, x_n^l\right\rangle \in P\left(l = \overline{1, L_n}\right). \tag{3}$$

Terminarz T_n n-tego obiektu jest to ciąg chwil „wejścia" tego obiektu na kolejne gałęzie marszruty:

$$T_n = \left\langle t_n^1, t_n^2, \dots \dots, t_n^{L_n}\right\rangle \tag{4}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} &t_n^l \in \Re;\, t_n^{l+1} - t_n^l \ge \tau\left(u_n^l\right) \quad \left(l = \overline{1, L_n}\right), \\ &t_n^1 \ge 0, \\ &t_n^{L_n} + \tau\left(u_n^{L_n}\right) \le TMAX \end{aligned} \tag{5}$$

są warunkami fizycznej realizowalności terminarza oraz jego ograniczenia się do przedziału czasu $[0, TMAX]$.

Reasumując, przepływ opisany jest liczbą przemieszczających się obiektów N, ich trasami μ_n oraz terminarzami $T_n \left(n=\overline{1,N}\right)$. Jeśli przez sieć nie przemieszczają się żadne obiekty, to przyjmujemy, że przepływ jest równy zbiorowi pustemu.

Warunki (3) oraz (5) nie uwzględniają wymogu nieprzekroczenia pojemności gałęzi grafu przez przemieszczające się obiekty. Przed sformułowaniem odpowiednich warunków wprowadźmy pojęcie **standardowej sieci pojemnościowej**. Jest to sieć pojemnościowa zdefiniowana jak (1), dla której wszystkie pojemności gałęzi są równe 1. W takim razie w definicji standardowej sieci pojemnościowej może być pominięta funkcja $p: U \to \boldsymbol{P}$. Każdej sieci pojemnościowej odpowiada, w sensie identycznej interpretacji przepływu, standardowa sieć pojemnościowa z nią **sprzężona**. Jeśli w sieci pojemnościowej występuje gałąź $u \in U$ o pojemności $p(u)$, czasie jej pokonywania $\tau(u)$ i łącząca wierzchołki $x,y \in W$, tzn. $\langle x,u,y\rangle \in P$, to w sieci sprzężonej w jej miejsce wprowadza się $p(u)$ gałęzi $u_1, u_2, \dots \dots, u_{p(u)}$ z pojemnościami jednostkowymi – tworząc tym samym multigraf, dla których czasy pokonywania są identyczne $\tau(u_m) = \tau(u)\left(m=\overline{1,p(u)}\right)$, oraz które skierowane są tak samo jak gałąź $u \in U$, tzn. $\langle x,u,y\rangle \in P \Leftrightarrow \langle x,u_m,y\rangle \in P \ \left(m=\overline{1,p(u)}\right)$.

Można pokazać [3], że przepływ w sieci pojemnościowej odpowiada w sposób bijekcyjny (z dokładnością do wyboru „zwielokrotnianych” gałęzi) przepływowi w standardowej sieci pojemnościowej do niej sprzężonej. Tym samym zadanie wyznaczania przepływu w sieci pojemnościowej można zastąpić równoważnym jej zadaniem dla sprzężonej z nią sieci standardowej.

Dla standardowej sieci pojemnościowej warunki nieprzekroczenia pojemności gałęzi sieci oznaczają, że w żadnej chwili na tej samej gałęzi nie może przebywać więcej niż jeden obiekt. W postaci formalnej takie wymaganie ma postać następującą:

$$\forall n,m=\overline{1,N}\ \forall l=\overline{1,L_n}\ \forall k=\overline{1,L_m} : \left[\left(u_n^l = u_m^k\right) \wedge (n \neq m) \Rightarrow \left(t_m^k \geq t_n^{l+1}\right) \vee \left(t_m^{k+1} \leq t_n^l\right)\right] \tag{6}$$

gdzie:

$t_n^{L_n+1} = t_n^{L_n} + \tau\left(u_n^{L_n}\right);\ t_m^{L_m+1} = t_m^{L_m} + \tau\left(u_m^{L_m}\right)$.

Wartością przepływu w przedziale czasu $[0,TMAX]$ nazywamy liczbę przemieszczających się w sieci obiektów, czyli liczbę zero dla przepływu będącego zbiorem pustym, lub liczbę N w przeciwnym przypadku. Ogólnie wartość przepływu oznaczamy liczbą N, zakładając że przyjmuje ona wartości będące liczbami naturalnymi.

Powyższa definicja przepływu związana jest, jak widać, z poruszającymi się obiektami. Przepływ w sieci pojemnościowej można też równoważnie zdefiniować z punktu widzenia wierzchołków sieci podając dla każdego wierzchołka zbiory (w ogólnym przypadku z powtórzeniami) momentów „dotarcia” obiektów z każdej gałęzi dochodzącej do tego wierzchołka, zbiory momentów „opuszczenia” wierzchołka na gałęzie wychodzące z tego wierzchołka oraz bijekcję pierwszego zbioru w drugi, czyli sposób „przechodzenia” obiektów przez wierzchołek. Oczywiście poprawność takiej definicji wymaga, aby wartość tej bijekcji dla każdego argumentu była równa wartości tego argumentowi.

Przepływ, którego wartość N jest maksymalna na zbiorze wszystkich przepływów dopuszczalnych dla ustalonej sieci pojemnościowej i przedziału czasu $[0,TMAX]$, nazywamy **przepływem maksymalnym**. Przepływ, którego wartość równa jest ustalonej z góry wartości nazywamy **przepływem zaspokajającym**.

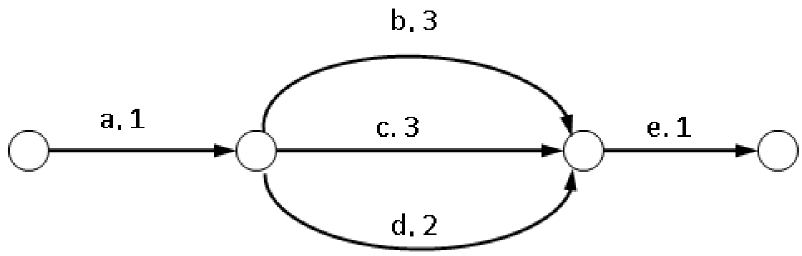
3. WYZNACZANIE PRZEPŁYWU MAKSYMALNEGO

Ogólny problem wyznaczania przepływu w sieci pojemnościowej formułuje się następująco: Czy dla danej sieci pojemnościowej S istnieje w przedziale czasu $[0,TMAX]$ przepływ o wartości naturalnej N?

Można udowodnić, że za wyjątkiem przypadku $N=0$ tak sformułowany problem jest problemem NP-zupełnym, czyli do czasu rozstrzygnięcia jednego z tzw. problemów milenijnych, czy $P=NP$?, niecelowe jest poszukiwanie wielomianowych algorytmów rozwiązywania zadania wyznaczania przepływu maksymalnego.

Jedna z metod rozwiązywania zadań planowania ruchu obiektów w sieci skierowanej bez pętli (ale nie pojemnościowej), z czasami pokonywania łuków sieci będących liczbami całkowitymi, polega na zamianie sieci początkowej jej tzw. odpowiednikiem dynamicznym [6]. W miejsce każdego wierzchołka x wprowadzane w nim zostają wierzchołki $x(t)$ $\left(t=\overline{0,TMAX}\right)$. Te nowe wierzchołki $x(t)$ oraz $y(t')$ łączy się łukiem $\langle x(t),y(t')\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle x,y\rangle$ jest łukiem w grafie początkowym oraz $t'-t=\tau(\langle x,y\rangle)$. Ponadto wprowadza się łuki odpowiadające sytuacji pozostawania obiektów na łukach przez jednostkę czasu. Wyznaczony w tak skonstruowanym odpowiedniku dynamicznym statyczny przepływ zero-jedynkowy odpowiada opisowi ruchu obiektów w sieci wyjściowej. Udowadnia się [6], że w odpowiedniku dynamicznym zawsze istnieje taki zero-jedynkowy maksymalny przepływ statyczny, że odpowiadający mu ruch obiektów przebiega „bez zahamowań”, tzn. że obiekty w trakcie przemieszczania się nie muszą się zatrzymywać. Można pokazać, że ruch obiektów w sieci pojemnościowej nie ma takiej właściwości w przypadku ogólnym. Wskazuje na to poniższy przykład.

Niech rys. 1. przedstawia standardową – z jednostkowymi pojemnościami – sieć pojemnościową. Nad łukami zaznaczone są nazwy łuków oraz minimalne czasy ich pokonywania.



Rys. 1. Standardowa sieć pojemnościowa

Źródło: opracowanie własne.

W przedziale czasu $[0,10]$ można wyznaczyć przepływ o wartości $N=6$ np. taki, którego kolejne marszruty zawierają gałęzie d,c,d,b,d,d. Nie można natomiast wyznaczyć przepływu o wartość $N=7$, gdyż oznaczałoby to, iż w każdej jednostce czasu ze źródła „wyrusza” pewien obiekt. W takim razie ostatni obiekt musiałby się poruszać przez łuk d, a obiekt poruszający się przed nim musiałby dotrzeć do łuku e o jednostkę czasu wcześniej, czyli ze źródła musiałby „wystartować” o dwie jednostki czasu wcześniej, a tym samym nie w każdej jednostce czasu ze źródła „startowałby” jakiś obiekt. W takim razie wartość maksymalnego przepływu wynosi $N^*=6$. Z powyższego wynika, że w dowolnym przepływie maksymalnym występują przynajmniej raz takie dwie kolejne marszruty, których chwile początkowe różnią się o jeden, że pierwsza z nich przechodzi przez łuk b lub c, a druga przez łuk d. Z powyższego wynika, że oba obiekty „spotkają się” przed łukiem e, a w takim razie jeden z nich będzie musiał się „zatrzymać”.

Możliwość występowania sytuacji kolizyjnych między poruszającymi się obiektami wynika z faktu, że sieć pojemnościowa ma charakter sieci „z pamięcią”, gdyż zajętość gałęzi przez przebywający na niej obiekt może obejmować dłuższy odcinek czasu, niż tylko określony minimalnym czasem pokonywania tej gałęzi. Odpowiednik dynamiczny sieci pojemnościowej musi więc zawierać łuki „przechowujące” informacje o tym, od kiedy i jak długo obiekt przebywa na gałęzi. W takim odpowiedniku wierzchołki „dynamiczne” zawierają informację o nazwie wierzchołka w grafie G, czasie astronomicznym, długości niezbędnego czasu przebywania na łuku oraz wartości czasu, gdy obiekt może, ale nie musi, łuk opuścić. Między dwoma wierzchołkami występuje łuk wtedy i tylko wtedy, gdy jakiś obiekt może przejść ze stanu opisywanego wierzchołkiem początkowym, do stanu opisanego jego następnikiem. Zadanie wyznaczania maksymalnego statycznego przepływu zero-jedynkowego nie jest w tej sieci równoważne zadaniu wyznaczania maksymalnego statycznego przepływu zero-jedynkowego. Nie może być więc rozwiązywane z wykorzystaniem np. klasycznego algorytmu Forda i Fulkersona, posługującego się pojęciem łańcucha powiększalnego. Można je natomiast sformułować jako zadanie liniowego binarnego programowania matematycznego (PLB). Niestety w takim zadaniu w przypadku ogólnym macierz ograniczeń nie jest całkowicie unimodularna [3]. Stąd wynika, że z warunków binarności zmiennych decyzyjnych zrezygnować nie można.

Odpowiednik dynamiczny sieci pojemnościowej można też wykorzystać w zadaniu wyznaczania wszystkich przepływów maksymalnych w ustalonej sieci pojemnościowej i zadanym przedziale czasu. Konstruujemy unigraf nieskierowany, którego wierzchołkami są wszystkie drogi łączące odpowiedniki źródła z odpowiednikami odpływu, o długości nieprzekraczającej $TMAX$. Krawędź w takim grafie to para wierzchołków odpowiadających drogom, które nie mogą jednocześnie odpowiadać ruchom dwóch obiektów (graf konfliktów). Każdemu najliczniejszemu zbiorowi wewnętrznie stabilnemu w takim grafie odpowiada przepływ maksymalny w sieci pojemnościowej i ustalonym przedziale czasu. Stosując dowolny algorytm wyznaczania wszystkich najliczniejszych zbiorów wewnętrznie stabilnych, np. algorytm oparty na wyznaczaniu wektorów minimalnych funkcji boolowskiej, otrzymamy wszystkie przepływy maksymalne w początkowej sieci pojemnościowej.

Zadanie wyznaczania maksymalnego przepływu w standardowej sieci pojemnościowej upraszcza się, gdy wszystkie czasy pokonywania gałęzi są identyczne. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że są one jednostkowe. Rozpatrzmy sieć pomocniczą $\widetilde{S}$, w której graf $\widetilde{G} = \left\langle W, \widetilde{U} \right\rangle$ jest unigrafem skierowanym bez pętli, przy czym $\left\langle x,y \right\rangle \in \widetilde{U}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $A\left(x,y\right) = \left\{ u \in U : \left\langle x,u,y \right\rangle \in P \right\}$ jest niepusty, czyli gdy para wierzchołków $\left\langle x,y \right\rangle \in W \times W$ jest połączona łukiem lub krawędzią. Na łukach grafu $\widetilde{G}$ opiszmy funkcję $\widetilde{\omega}$ o wartościach równych licznościom zbiorów $A\left(x,y\right)$, czyli $\widetilde{\omega}\left(x,y\right) = \overline{\overline{A\left(x,y\right)}}$. W sieci $\widetilde{S}$ ~metodą potencjałów wierzchołkowych wyznaczamy zero-jedynkowy przepływ $\widetilde{f}$ maksymalizujący funkcjonał:

$$E\left(f\right) = \left(TMAX + 1\right) \cdot \upsilon - \sum_{\left\langle x,y \right\rangle \in \widetilde{U}} f\left(x,y\right) \tag{7}$$

gdzie υ jest wartością przepływu f.

Na podstawie przepływu $\widetilde{f}$ cechujemy jedynkami i zerami gałęzie grafu G w sposób następujący:

– jeśli $\widetilde{f}\left(x,y\right) = l > 0$, to l różnych gałęzi zbioru $A\left(x,y\right)$ cechujemy jedynką, a pozostałe zerami;

– jeśli $\widetilde{f}\left(x,y\right) = 0$, to wszystkie gałęzie zbioru $A\left(x,y\right)$ cechujemy zerami.

Takie ocechowanie wyznacza zero-jedynkowy przepływ statyczny w grafie G z jednostkowymi przepustowościami. Na jego podstawie konstruujemy υ rozłącznych parami dróg $\chi_n = \left\langle x_n^0, u_n^1, x_n^1, \ldots \ldots, u_n^{L_n}, x_n^{L_n} \right\rangle$ łączących źródło x^p z odpływem x^k i takich, które zawierają gałęzie wyłącznie z cechą jeden. W takim razie, na podstawie (7) otrzymujemy:

$$E\left(\widetilde{f}\right) = \left(TMAX + 1\right) \cdot \widetilde{\upsilon} - \sum_{n=1}^{\widetilde{\upsilon}} L_n = \sum_{n=1}^{\widetilde{\upsilon}} \left(TMAX + 1 - L_n\right) = \sum_{n=1}^{\widetilde{\upsilon}} R_n \tag{8}$$

W [6] pokazano, że $R_n \geq 0 \left(n = \overline{1,\widetilde{\upsilon}}\right)$. Jeśli $R_n = 0$, czyli długość drogi $L_n = TMAX + 1$, to modyfikujemy przepływ $\widetilde{f}$ oraz ocechowanie gałęzi grafu G w ten sposób, aby otrzymać wyłącznie drogi o długościach nieprzekraczających $TMAX$. Wartość $E\left(\widetilde{f}\right)$ nie ulegnie zmianie, czyli nowy przepływ w dalszym ciągu maksymalizuje funkcjonał (7). Każdej drodze χ_n przyporządkowujemy R_n terminarzy w postaci $T_n^t = \langle t, t+1, t+2, \dots \dots, t+L_n \rangle$ dla $t = \overline{0, R_n - 1}$. Zbiór wszystkich par $\langle \chi_n, T_n^t \rangle$ jest przepływem maksymalnym w przedziale czasu $\langle 0, TMAX \rangle$ w standardowej sieci pojemnościowej z jednostkowymi czasami pokonywania gałęzi. Wartość tego przepływu wynosi $E\left(\tilde{f}\right)$. Przepływ ten charakteryzuje się tym, że przemieszczające się obiekty nie zatrzymują się, a ponadto łączny czas ich przebywania w sieci jest minimalny – „zajmują" więc tę sieć najkrócej.

W podobny sposób można wyznaczyć przepływ w standardowej sieci pojemnościowej, gdy wszystkie czasu pokonywania gałęzi grafu są identyczne, a liczności zbiorów $A(x,y)$ są całkowitą ich krotnością. Przy spełnieniu pewnych dodatkowych warunków przepływ otrzymany taką metodą też jest maksymalny.

Występują też inne przypadki szczególne, w których w stosunkowo prosty sposób można wyznaczyć przepływ maksymalny w sieci pojemnościowej. Przykładowo ma to miejsce wtedy, gdy $R_n = 1$ dla wszystkich n, lub też gdy długość każdej drogi w sieci pojemnościowej między źródłem a odpływem jest większa od $TMAX - \min_{u \in U} \tau(u)$.

Praktycznie w przypadku zadania ogólnego możemy posługiwać się metodami wyznaczania rozwiązania suboptymalnego polegającymi na doborze kilku metod dla zadań uproszczonych, modyfikując etapowo sieć początkową tak, aby spełnić warunki niezbędne do zastosowania kolejnej metody. Po wyznaczeniu przepływu możemy porównać jego wartość z uzyskanym oszacowaniem górnym. W przypadku równości otrzymany przepływ jest przepływem maksymalnym. Oszacowaniem górnym może być przykładowo iloczyn $TMAX$ i wartości maksymalnego przepływu statycznego w sieci, której graf jest identyczny z grafem sieci pojemnościowej, a przepustowości gałęzi są równe odwrotnościom czasów ich pokonywania. Gdy różnica między oszacowaniem górnym a wartością otrzymanego przepływu jest niezadowalająco duża, to otrzymane rozwiązanie można poprawić metodą przeglądu bezpośredniego Każdy dopuszczalny przepływ jest odpowiednikiem wierzchołka drzewa przeglądu. W wyniku każdego kroku postępowania tworzymy przepływ o wartości o jeden większej lub stwierdzamy, że taki przepływ nie istnieje. Jeżeli nowy przepływ powoduje włączenie nowej drogi do przepływu początkowego, to odpowiada to istnieniu aktywnego następnika wierzchołka badanego. Jeżeli nie, to nowy przepływ jest aktywnym następnikiem innego wierzchołka drzewa przeglądu o identycznej z badanym przepływem części przepływu tzn. identycznymi wartościami przepływu dla pewnych łuków. Rozpatrywany wierzchołek aktywny zostaje zamknięty i postępowanie powtarzamy.

Zasygnalizowane powyżej metody wyznaczania przepływu maksymalnego w sieci pojemnościowej stosunkowo łatwo można uogólnić na następujące przypadki:

- wyznaczanie przepływu zaspokajającego – poprzez modyfikację sieci pojemnościowej polegającą na dołączeniu wierzchołka fikcyjnego oraz połączeniu go ze źródłem odpowiednią liczbą łuków z pewnymi wartościami czasów ich pokonywania oraz pojemnościami; zwiększa się odpowiednio czas $TMAX$;
- występowanie wielu źródeł lub odpływów; podobnie jak poprzednio wprowadza się jedno fikcyjne źródło (jeden fikcyjny odpływ) połączone łukami z wszystkimi źródłami (odpływami) i odpowiednimi charakterystykami;
- pojemności gałęzi zmieniają się w czasie – wpływa to na sposób konstruowania odpowiednika dynamicznego standardowej sieci pojemnościowej;
- minimalne czasy pokonywania gałęzi są zależne od czasu – podobnie jak wyżej wpływa to na sposób konstruowania odpowiednika dynamicznego.

Bardziej złożonym jest natomiast problem wyznaczanie przepływu wieloasortymentowego, równoważny problemowi wyznaczanie przepływów pomiędzy różnymi parami źródło-odpływ dotyczących tej samej sieci pojemnościowej, a więc wpływających „równoprawnie" na zajętość gałęzi tej sieci. Głównym problemem w takim przypadku jest istotny wzrost złożoności obliczeniowej odpowiednich algorytmów.

4. Przykładowe obszary zastosowań w procesach logistycznych

Wydaje się, że najbardziej naturalnym obszarem zastosowań metod dotyczących sieci pojemnościowy jest transport kolejowy analizowany np. na etapie konstruowania tras pociągów lub wyznaczanie rozkładów jazdy. Obowiązujące zasady prowadzenia ruchu kolejowego powodują, że ze swej natury sieć kolejowa ma charakter sieci pojemnościowej. Topologia sieci kolejowej analizowanej z punktu widzenia potrzeb prowadzenia ruchu kolejowego może być przedstawiona w postaci multigrafu skierowanego. W ruchu kolejowym, ze względów bezpieczeństwa i sposobów działania urządzeń zabezpieczenia ruchu kolejowego, pojęcie zajętości fragmentów sieci kolejowej spowodowanej ruchem pociągu jest szersze, niż wynikałoby to tylko z pojęcia pojemności. Przebywanie pociągu na pewnym odcinku toru wywołuje niedostępność dla ruchu innych pociągów nie tylko tego toru, ale również szeregu innych elementów sieci kolejowej. Ponadto konieczność zmiany stanu odpowiednich urządzeń zabezpieczenia ruchu powoduje, że czas tej zajętości nie musi pokrywać się z czasem przebywania pociągu na tym torze. Można więc powiedzieć, że zajętość sieci kolejowej ma charakter przestrzenno-czasowy tzn. obejmuje pewien fragment sieci i ma ustalone różne parametry czasowe. Analizując ruch pociągów z punktu widzenia wybranej pary stacji ustalamy odpowiedniki źródeł i odpływów. Możemy przy tym uwzględnić istniejący ruch pociągów i inne zamknięcia elementów sieci, sprowadzając sieć pojemnościową do przypadku pojemności zależnych od czasu. Dla takiego modelu sieci można w sposób podobny do opisanego powyżej skonstruować odpowiednik dynamiczny i wyznaczać maksymalny lub zaspokajający przepływ odpowiadający rozkładowi jazdy pociągów. Wartość przepływu maksymalnego może posłużyć przykładowo do oszacowania przepustowości fragmentu sieci kolejowej.

Sieci pojemnościowe mogą być też użyteczne w procesie analizy i projektowania takich podsystemów logistycznych, w których istotną rolę pełni pojęcie pojemności. Przykładowo możemy skonstruować model systemu transportowego, w którym w sposób ustalony poruszają się pojazdy charakteryzujące się pojemnościami ładunkowymi. Każda trasa pojazdu może być interpretowana jako łuk sieci pojemnościowej, którego pojemność jest niezerowa dla tych chwil, w których może następować załadunek produktów niemasowych. Przepływ w tej sieci może być opisem sposobu przewozu ładunków. Przy projektowaniu takich systemów przewozowych można uwzględniać przedstawione w rozdziale 3. wnioski dotyczące tych właściwości sieci pojemnościowych, które umożliwiają zorganizowanie ruchu obiektów bez zatrzymywania się.

Kolejnym obszarem, w którym dla pewnych zagadnień mogą być wykorzystywane sieci pojemnościowe, są problemy magazynowania. W takich modelach najczęściej należy rozpatrywać pojemności gałęzi jak i wierzchołków grafu, będącego modelem procesów związanych z przepływem towarów w magazynach, szczególnie wykorzystujących system paletowy. Pojemności w takich modelach dotyczą nie tylko dróg przemieszczanie się palet, ale również miejsc przeznaczonych na ich składowanie. Ponadto podobnie jak w transporcie kolejowym zajętość ta może dotyczyć nie tylko konkretnych miejsc, w których znajdują się palety, ale również niektórych miejsc sąsiednich, do których może być blokowane dostęp. Oba powyższe przypadki mogą być przedstawione przez sieć pojemnościową odpowiednio uogólnioną. Przykładowo sieć z pojemnościami wierzchołków można zamienić na sieć, w której będą występowały wyłącznie pojemności gałęzi. Dla takiej sieci mogą być już stosowane metody przedstawione wyżej.

Można też wskazać problemy dotyczące harmonogramowania wykonywania zadań przez wykonawców, którymi mogą być zarówno zespoły ludzi jak i urządzenia techniczne. Dla znanych zależności technologicznych między niepodzielnymi operacjami składowymi, przy założeniu, że wykonawcy tych operacji są zajęci aż do chwili przekazania wyników swojej pracy kolejnym wykonawcom, modelem takiego systemu produkcyjnego może być sieć pojemnościowa, a przepływ może odpowiadać harmonogramowi wykonywania wielu zadań złożonych w takim systemie. Wartość przepływu maksymalnego może być interpretowana jako maksymalna zdolność „produkcyjna” w ustalonym przedziale czasu.

Zastosowanie pojęć i aparatu z zakresu przedstawionej problematyki jest, jak w każdym przypadku stosowania pewnych abstrakcyjnych modeli matematycznych, ograniczone przez przeprowadzane uprzednio modelowanie matematyczne obiektu rzeczywistego i problemu z nim związanego. Wybierając istotne z punktu widzenia celu modelowania cechy obiektu i związki między nimi konstruujemy model matematyczny stosując przy tym odpowiednie zasady badań operacyjnych oraz analizy systemowej. Zadania formułowane w języku tego modelu powinny być następnie rozwiązywane znanymi lub nowo opracowanymi metodami matematycznymi. W tym sensie, jeśli okaże się, że modelem pewnego obiektu rzeczywistego może być sieć pojemnościowa, a zadanie może być sformułowane jako zadanie wyznaczania przepływu maksymalnego (lub równoważne) w tej sieci, to przydatne mogą być metody zasygnalizowane w niniejszym artykule. Postępowanie odwrotne, to znaczy polegające na poszukiwaniu obiektu rzeczywistego, którego modelem formalnym mogłaby być sieć pojemnościowa, prowadzi najczęściej do wprowadzenia uproszczeń niedopuszczalnych z punktu widzenia problemu związanego z obiektem rzeczywistym. Z tych powodów przedstawione powyżej przykłady zastosowań sieci pojemnościowy w problemach logistyki jest tylko zasygnalizowaniem pewnych potencjalnych możliwości, a nie prezentacją kompletnych modeli matematycznych odpowiednich procesów logistycznych.

Streszczenie

W artykule przedstawiono podstawowe pojęcia i właściwości sieci formalnych przy pojemnościowych charakterystykach gałęzi. Podano definicje: sieci pojemnościowej, standardowej sieci pojemnościowej, przepływu, przepływu maksymalnego oraz zaspokajającego. Zasygnalizowano niektóre metody wyznaczania przepływu maksymalnego dla przypadków szczególnych zwracając uwagę na złożoność obliczeniową problemu. Przedstawiono ideę zastosowania odpowiednika dynamicznego sieci pojemnościowej do wyznaczania przepływu maksymalnego. Wskazano na niektóre możliwe zastosowania przepływów w sieciach pojemnościowych do modelowania procesów logistycznych oraz rozwiązywania odpowiednich zadań optymalizacyjnych.

Słowa kluczowe: badania operacyjne, teoria sieci, procesy logistyczne, transport kolejowy.

A capacity networks in logistic process modeling

Abstract

In this paper fundamental definitions and properties of formal networks with capacity of edges and arcs are presented. There are definitions of: capacity network, standard capacity network, flow, maximum flow and satisfactory flow. Some methods of constructing of maximal flow in special cases are described. Computational complexity of these methods is taken under consideration. An idea of implementation of so-called dynamical equivalent of the capacity network for construction maximum flow is discussed. Examples of applications of flows in capacity networks in logistic processes modeling and solving related optimization problems are presented.

Key words: operation research, network theory, logistic processes, rail transport.

LITERATURA

[1] Albert R., Jeong H., Barbási A.-L: Diameter of the World Wide Web. Nature, 401: 130-131, 1999.
[2] Cardarelli G.: Scale-frre networks. Complex web in nature and technology. Oxford University Press, Oxford, 2007.
[3] Chojnacki A. B.: Przepływy w sieciach pojemnościowych. WAT, Warszawa, 1987.
[4] Erdös P., Rényi A.: On the evolution of random graphs. Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Science, 5: 17-61. 1960.
[5] Evans J. R., Jarvis J. J.: Network Topology and Integral Multicommodity Flow Problems. Networks 8, 1978.
[6] Ford L. R Jr.: Constructing Maximal Dynamic Flows from Static Flows. Operation Research, nr 6, 1958.
[7] Fronczak A., Fronczak P.: Świat sieci złożonych. Od fizyki do Internetu. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2009.
[8] Glover F., Hultz J., Klingman D.: Improved Computer Based Planning Networks. Interfaces, 6 (4), 1978.
[9] Song Ch., Havlin S., Makse H. A.: Self-similarity of complex networks. Nature, 433: 392-395, 2005.
[10] Watts D.J., Strogatz S.H.: Collective dynamics of „small-world” networks. Nature, 393: 440-442,1998.