Milena Bieniek[1]
Zakład Statystyki i Ekonometrii, Instytut Ekonomii i Finansów, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej

Poziom obsługi popytu i stopień ilościowej realizacji zamówień dla różnych rozkładów prawdopodobieństwa popytu

1. WSTĘP

Utrzymywanie odpowiedniego poziomu zapasów jest istotnym elementem polityki przedsiębiorstwa. Głównymi powodami utrzymywania zapasów są między innymi poprawienie jakości obsługi klienta, redukcja łącznych kosztów logistycznych, zmniejszenie negatywnego wpływu losowości popytu czy redukcja niepewności związanej z czasem realizacji zamówienia. Dodatkowymi znaczącymi przyczynami posiadania zapasów są również udostępnienie produktów sezonowych przez cały rok oraz spekulacja dotycząca ceny towarów. Równocześnie utrzymywanie zapasów może być wyjątkowo kosztowne, sięgając nawet ponad 30 procent wartości towarów w zapasie (por. Ghiani i in., 2004, str. 121-157, Axsäter, 2006). W celu zminimalizowania niedogodności związanych z utrzymywaniem zapasów należy podjąć właściwie nimi zarządzanie.

Wyznacznikiem odpowiedniego doboru strategii kontroli zapasów jest utrzymanie poziomu obsługi klienta na odpowiednim poziomie. Stosuje się tu różnorodne wskaźniki poziomu obsługi. W modelach deterministycznych, gdzie popyt, ceny i czas ponownego zamówienia są od początku znane, uwaga jest skupiona nie na poziomie obsługi klienta, a na różnego rodzaju kosztach. Do kosztów tych zalicza się koszty utrzymywania zapasu, koszty dostaw, koszty zakupu towarów i podobne. Natomiast w modelach stochastycznych wykorzystywany jest warunek utrzymywania pewnego poziomu obsługi klienta, stwierdzający na przykład, że klient zostanie obsłużony z pewnym prawdopodobieństwem. Dla takich losowych modeli niemożliwe jest zaspokojenie całego popytu z powodu niepewności co do niektórych wielkości. Mogą to być między innymi losowość popytu, losowość czasu realizacji zamówienia, losowe ceny i inne. Najczęściej stosowanymi miarami poziomu obsługi klienta są poziom obsługi popytu oraz stopień ilościowej realizacji zamówień. Obydwa mierniki zdefiniowane są za pomocą pojęć rachunku prawdopodobieństwa.

Optymalne zarządzanie zapasami ma swój początek już we wczesnych latach XX wieku. Znaczący rozwój tej gałęzi badań operacyjnych nastąpił po II wojnie światowej, gdy zajęto się modelami stochastycznymi. W latach 70-tych wzmożono prace nad modelami zarządzania zapasami i ich zastosowaniem w praktyce (por. Bartman i in., 1992). Przewagą podejścia probabilistycznego jest lepsze modelowanie rzeczywistych zjawisk niż to ma miejsce w ujęciu deterministycznym. Systemy deterministyczne mają rzadkie zastosowanie, gdyż z każdym systemem związana jest niepewność. Jednakże z drugiej strony mimo, że systemy stochastyczne są lepiej dopasowane do rzeczywistych warunków, to są bardziej skomplikowane matematycznie i generują trudności w ich analizie. Więcej informacji na temat stochastycznych modeli zarządzania zapasami można znaleźć w książkach Silvera i in. (1998), Zipkina (2000), Axsätera (2006) i literaturze w nich cytowanej. W literaturze polskiej problem zapasów poruszony jest w książkach Krzyżaniaka (2002) lub Mokrzyckiej (1999). Ponadto wśród polskich artykułów dotyczących sterownia zapasami należy wymienić prace Tymińskiej (2012), Krzyżaniaka (2003), Cyplika (2003, 2005) oraz Czajki i Gdowskiej (2013). W ostatniej pozycji wiele miejsca poświęca się na omówienie sposobów wyznaczenia miar poziomu obsługi klienta i ograniczeń w stosowaniu tych miar.

Wśród znaczących prac w literaturze zagranicznej dotyczących problematyki optymalizacji zapasów można wymienić artykuły takich autorów jak Guijarro i in. (2012), Silver i Bischak (2001), Teunter (2009)

[1] milena.bieniek@umcs.lublin.pl

czy Tempelmeier (2000). W pracy Guijarro i in. (2012) podana jest metoda estymacji stopnia ilościowej realizacji zamówień dla rozkładów dyskretnych, w tym rozkładu Poissona. W artykule Teuntera (2009) przedyskutowana jest powyższa miara poziomu obsługi dla dowolnego ciągłego rozkładu popytu. Natomiast w pracy Tempelmeiera (2000) została wprowadzona nowa miara poziomu obsługi oparta na oczekiwanym czasie braku zapasu. Ponadto z tematyki sterowania zapasami w ostatnim czasie ukazały się artykuły: Bertazziego (2015), Govindana (2015), Praka i in. (2015) czy San-Jos i in. (2015).

W tej pracy rozważone są stochastyczne modele sterowania zapasami z losowym popytem. Kryterium wyboru modelu jest ustalenie pewnego poziomu obsługi klienta. Poziom ten mierzony jest dwoma miernikami, a mianowicie poziomem obsługi popytu i stopniem ilościowej realizacji zamówień. Współczynniki te obliczone są dla typowych rozkładów popytu czyli rozkładu normalnego, gamma i Poissona. Ponadto opisana jest możliwość obliczenia poziomów obsługi klienta w zależności od tego, czy wymiar czasowy rozkładu popytu jest dłuższy czy krótszy od długości cyklu uzupełniania zapasu.

Praca ma następującą kompozycję. W rozdziale drugim przytoczone są definicje miar poziomu obsługi klienta. Pokazane są sposoby obliczenia tych wskaźników za pomocą pojęć rachunku prawdopodobieństwa. Ponadto badany jest wpływ rozkładu losowego popytu na te miary. W rozdziale trzecim podane są wzory dla wskaźników poziomu obsługi klienta dla rozkładu normalnego, gamma i Poissona. Rozdział 4 poświęcony jest możliwościom obliczania poziomu obsługi klienta w zależności od stosunku wymiaru czasowego rozkładu popytu do długości cyklu uzupełniania zapasu. Ostatni rozdział podsumowuje główne tezy pracy.

2. MIARY POZIOMU OBSŁUGI KLIENTA

W zarządzaniu zapasami przy losowym popycie wyróżnione są dwa systemy sterowania zapasami: system zamawiania oparty na poziomie informacyjnym (lub na punkcie ponownego zamówienia, ang. reorder point policy) oraz system cyklu zamawiania oparty na przeglądzie okresowym (ang. cycle order policy) (por. Ghiani i in., 2004). Model poziomu zamawiania oznacza się symbolem (Q,R), natomiast model cyklu zamawiania symbolem (S,T). W systemie ponownego punktu zamówienia wymienia się następujące założenia: powtarzające się zamówienie na tym samym poziomie, ciągły przegląd zapasów, stochastyczny, ale stacjonarny popyt ze znanymi wartością oczekiwaną i wariancją, stały czas realizacji zamówienia (lead time), niewielkie braki w porównaniu do średniego zapasu oraz utrzymywanie zapasu bezpieczeństwa. Ponadto zapotrzebowanie i czas realizacji zamówienia są na średnim poziomie. Poniesione koszty możemy tu podzielić na: koszty uzupełnienia zapasu, koszty utrzymywania zapasu oraz koszty braków. Wydajność systemu sterowania zapasami może być określona za pomocą miar poziomu obsługi klienta. W pracy rozważane są dwie miary, mianowicie poziom obsługi popytu i stopień ilościowej realizacji zamówień przy założeniu, że popyt jest losowy o zadanym rozkładzie prawdopodobieństwa ze znanymi parametrami. We wzorach i definicjach stosowana jest podana niżej notacja.

Oznaczmy przez:

– X_T zmienną losową oznaczająca popyt w czasie realizacji zamówienia zadaną pewnym rozkładem prawdopodobieństwa ze znanymi parametrami;
– T czas realizacji zamówienia (lead time);
– $\mu = \mu_T$ średnią popytu w czasie realizacji zamówienia;
– $\sigma = \sigma_T$ odchylenie standardowe popytu w czasie realizacji zamówienia;
– $F(.)$ dystrybuantę rozkładu popytu w czasie realizacji zamówienia;
– $f(.)$ funkcję gęstości popytu w czasie realizacji zamówienia;
– R punkt ponownego zamówienia (reorder point);
– Q wielkość dostawy (łączny popyt);
– $E(B)$ oczekiwaną liczbę braków;
– ω współczynnik bezpieczeństwa;
– $P(A)$ prawdopodobieństwo zdarzenia A;
– $\Phi(.)$ dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego;
– $\varphi(.)$ funkcję gęstości standardowego rozkładu normalnego.

Poziomy obsługi klienta można podzielić na dwie klasy. Pierwsza kategoria mierzy częstość lub wielkość braku zapasu. Druga klasa mierzy czas potrzebny klientom na zrealizowanie ich zamówienia (time-based service levels) (por. Wheatley, 2014). Najbardziej popularne miary poziomu obsługi klienta to:
$\alpha =$ “cycle service level”, prawdopodobieństwo nie wyjścia z zapasu, zwane prawdopodobieństwem obsługi popytu;
$\beta =$ ”fill rate”, stopień ilościowej realizacji zamówień czyli część popytu, która może być od ręki zrealizowana z zapasu;
$\gamma =$ ”ready rate” część czasu z dodatnim zapasem.

Miary poziomu obsługi klienta zdefiniowane przez α i β należą do pierwszej klasy, natomiast miara γ do drugiej. Szczególnie stopień ilościowej realizacji zamówień β może być uznany za dobrą miarę efektywności łańcucha dostaw. Wybór miary zależy od gałęzi produkcji. Przykładem może być tu zarządzanie zapasami części zamiennych, gdzie stosuje się miary β lub γ. Ponadto należy zauważyć, że dla rozkładów ciągłych i rozkładu Poissona fill rate β i ready rate γ są sobie równe, stąd wystarczy wyznaczyć tylko jedną z nich.

Definicja poziomu obsługi klienta typu α mówi, że wszystkie zamówienia zostaną zrealizowane bez opóźnień zanim zapas zostanie wyczerpany. Ten rodzaj miary poziomu obsługi klienta nie jest rekomendowany, gdyż nie zależy od wielkości partii. Jakkolwiek w praktyce nadal jest ona często stosowana, szczególnie w przypadku przeglądu ciągłego lub ciągłego popytu. Znacznie lepszą miarą jest stopień ilościowej realizacji zamówień β, mimo, że trudniejszy do obliczenia. Wyznaczony jest on poprzez oczekiwaną liczbę braków i uwzględnia wielkość partii zamówienia. Z tego powodu poziom obsługi klienta typu β jest szeroko używany w przemyśle.

W poniższej pracy rozważane są poziomy obsługi klienta dla ciągłych rozkładów: normalnego i gamma oraz dyskretnego rozkładu Poissona, stąd nie ma potrzeby wyznaczać ready rate, a wystarczy obliczyć jedynie fill rate. Stąd w dalszej części pracy przytoczone są i uproszczone jedynie wzory na prawdopodobieństwo obsługi popytu α i stopień ilościowej realizacji zamówień β. Matematycznie są one zadane wzorami:

$$\alpha = P(X \leq R)$$

oraz

$$\beta = 1 - \frac{E(B)}{Q},$$

gdzie oczekiwana liczba braków $E(B)$ ma postać:

$$E(B) = \int_R^\infty (x - R) f(x) dx.$$

W powyższym wzorze punkt ponownego zamówienia R jest wyrażony w terminach współczynnika bezpieczeństwa ω jako

$$R = \mu + \omega\sigma$$

(por. Axsäter, 2006). Miary obsługi klienta można zdefiniować na szereg innych sposobów. Na przykład niekonieczne jest użycie teorii prawdopodobieństwa. W pewnych sytuacjach bardziej adekwatny jest wymóg, że średni czas oczekiwania klienta na dostawę jest mniejszy od określonej liczby dni. W praktyce przedsiębiorstwo na samym początku określa poziom obsługi klienta i sposób mierzenia tego poziomu. Nie ma jednak wymogu ustalenia takiego samego poziomu obsługi dla wszystkich produktów. Częstą praktyką jest łączenie produktów w grupy i określanie dla nich jednakowych poziomów obsługi.

3. POZIOMY OBSŁUGI KLIENTA DLA TYPOWYCH ROZKŁADÓW POPYTU

W tym rozdziale prezentowane są wzory na obliczanie poziomu obsługi klienta dla typowych rozkładów popytu.

3.1. Typowe rozkłady popytu

Najczęściej stosowanym rozkładem dla modelowania popytu jest rozkład normalny. Dzieje się tak gdyż na mocy centralnego twierdzenia granicznego przy dużej liczbie danych zmierzają do niego inne rozkłady. Ma on duże zastosowanie przy modelowaniu popytu na dobra szybko rotujące. Rozkład ten ma dwa parametry: średnią i wariancję. Czasami gdy prawdopodobieństwo wystąpienia ujemnego popytu jest stosunkowo duże, lepiej jednak zamiast rozkładu normalnego posłużyć się rozkładem gamma przyjmującym jedynie wartości dodatnie. Rozkład gamma ma dwa parametry λ oraz r, i określony jest funkcją gęstości:

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, \qquad x > 0,$$

gdzie $\Gamma(x)$-jest tzw. funkcją gamma zdefiniowaną jako

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \qquad z > 0.$$

W szczególności dla całkowitych dodatnich z

$$\Gamma(z) = (z-1)!.$$

Rozkład gamma ma średnią $\mu = r/\lambda$ oraz odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{r}/\lambda$. Dystrybuanta ma postać niejawną, ale jej wartości mogą być wyznaczone za pomocą programów komputerowych. Warto zauważyć, że dla parametru $r = 1$ rozkład gamma redukuje się do rozkładu wykładniczego z parametrem λ i gęstością

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0,$$

oraz średnią i odchyleniem standardowym równymi odpowiednio $\mu = \sigma = 1/\lambda$.

Dla produktów wolno rotujących dobrym przybliżeniem rozkładu popytu jest rozkład Poissona. Jest to rozkład dyskretny z jednym parametrem λ zadany funkcją prawdopodobieństwa:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k = 1,2, \ldots.$$

Dla tego rozkładu średnia $\mu = \lambda$ oraz odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{\lambda}$. W przypadku gdy popyt modelowany jest znanym rozkładem prawdopodobieństwa można zmierzyć wymagany poziom obsługi klienta przy uzupełnianiu zapasu. W dalszej części artykułu podane są miary poziomu obsługi dla wymienionych typowych rozkładów popytu.

3.2. Poziom obsługi popytu dla typowych rozkładów popytu

Prawdopodobieństwo obsługi klienta α jest równe wartości dystrybuanty zmiennej losowej popytu X w punkcie uzupełnienia zapasu R. Dla rozkładu normalnego popytu poziom obsługi popytu α jest wyrażony wzorem:

$$\alpha = \Phi\left(\frac{R-\mu}{\sigma}\right)$$

lub równoważnie

$$\alpha = \Phi(\omega).$$

Dla rozkładu Poissona poziom obsługi popytu ma postać:

$$\alpha = F(R) = \sum_{k<R} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= \sum_{k<\lambda+\omega\sqrt{\lambda}} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Natomiast dla rozkładu gamma

$$\alpha = F(R) = \frac{\Gamma(r) - \Gamma(r, R\lambda)}{\Gamma(r)}$$

$$= \frac{\Gamma(r) - \Gamma(r, r + \sqrt{r}\omega)}{\Gamma(r)},$$

(Abd El-Fatah i in., 2011), gdzie $\Gamma(z, a)$ jest niekompletną funkcją gamma postaci:

$$\Gamma(z, a) = \int_a^\infty x^{z-1} e^{-x} dx.$$

W szczególności dla rozkładu wykładniczego poziom obsługi popytu jest zadany wzorem:

$$\alpha = F(R) = 1 - e^{-R\lambda}$$

$$= 1 - e^{-(\omega+1)}.$$

3.3. Stopień ilościowej realizacji zamówień i oczekiwana liczba braków dla typowych rozkładów popytu

Stopień ilościowej realizacji zamówień β można wyznaczyć na podstawie oczekiwanej liczby braków w zapasie $E(B)$. Dla rozkładu normalnego o średniej w cyklu uzupełniania zapasa μ i odchyleniu standardowym σ oczekiwaną liczba braków zadana jest za pomocą funkcji straty równej:

$$G(x) = \varphi(x) - \omega\big(1 - \Phi(x)\big)$$

$$= \int_x^\infty (y - x) f(y) dy.$$

Stąd wzór na oczekiwaną liczbę braków ma wówczas postać:

$$E(B) = \sigma G(\omega)$$

$$= \sigma\varphi(\omega) - \omega\sigma\big(1 - \Phi(\omega)\big)$$

$$= \sigma\varphi\left(\frac{R-\mu}{\sigma}\right) - (R-\mu)\left(1 - \Phi\left(\frac{R-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

(Axsäter, 2006, str. 90-99). Dla rozkładu gamma, korzystając z wyników pracy Abd El Fatah i in. (2011), oczekiwana liczba braków jest równa:

$$E(B) = \frac{1}{\Gamma(r)}\left[\frac{1}{\lambda}\Gamma(r+1, R\lambda) - R\Gamma(r, R\lambda)\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)}\left[\frac{1}{\lambda}\Gamma\big(r+1, r+\sqrt{r}\omega\big) - (r+\sqrt{r}\omega)\Gamma\big(r, r+\sqrt{r}\omega\big)\right].$$

W szczególności dla rozkładu wykładniczego powyższy wzór redukuje się do wyrażenia

$$E(B) = \frac{1}{\lambda} e^{-R\lambda} = \frac{1}{\lambda} e^{-(\omega+1)}.$$

Rozkład Poissona jest rozkładem dyskretnym, stąd oczekiwana liczba braków ma nieco bardziej skomplikowaną postać. Dokładny wzór na stopień ilościowej realizacji zamówień β wygląda następująco:

$$\beta = \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{R+Q} \sum_{k=\max\{R+1;j\}}^{R+Q} \frac{\lambda^{k-j} e^{-\lambda}}{(k-j)!}$$

(por. Axsäter, 2006, str. 90). Dalej zaprezentowane są przykłady obliczeniowe zastosowania podanych wzorów na poziom obsługi klienta.

3.4. Przykład

Niech poziom produkcji wynosi $Q = 10$ i punkt ponownego zamówienia równa się $R = 5$. Wówczas zakładając system punktu ponownego zamówienia (Q, R) przy przeglądzie ciągłym poniżej obliczone są poziomy obsługi klienta dla poszczególnych typowych rozkładów popytu. Po pierwsze dla rozkładu normalnego ze średnią równą $\mu = 4$ i odchyleniem standardowym równym $\sigma = 2$ poziomy obsługi klienta wynoszą:

$$\alpha = \Phi(0{,}5) = 0{,}69,$$

$$\beta = 1 - 0{,}2G(0{,}5)$$

$$= 1 - 0{,}2\{2\varphi(0{,}5) - (1 - \Phi(0{,}5)\} = 0{,}96.$$

W przypadku rozkładu gamma z parametrami $r = 4$ i $\lambda = 1$ otrzymuje się poziomy obsługi klienta równe:

$$\alpha = \frac{\Gamma(4{,}5)}{\Gamma(4)} = 0{,}735,$$

$$\beta = 1 - \tfrac{1}{10\Gamma(4)}(2\Gamma(5{,}5) - 6\Gamma(4{,}5))=0{,}738.$$

Natomiast dla rozkładu Poissona z parametrem $\lambda = 4$ poziomy te przyjmują wartości:

$$\alpha = F(5) = 0{,}785,$$

$$\beta = 0{,}1 \sum_{j=1}^{15} \sum_{k=\max\{6;j\}}^{15} \frac{4^{k-j} e^{-4}}{(k-j)!} = 0{,}959.$$

Obliczenia wykonane są za pomocą programu Mathematica. Widać stąd, że poziom obsługi popytu jest przeważnie niższy od odpowiadającego mu stopnia ilościowej realizacji zamówień biorącego pod uwagę wielkość partii.

4. Wyznaczanie rozkładu popytu w cyklu uzupełniania zapasu

Wyznaczenie rozkładu popytu w cyklu uzupełniania zapasu jest kluczowe dla wyznaczenia poziomów obsługi klienta. Co więcej, znany rozkład popytu w czasie wystarczy w większości przypadków do obliczenia miar poziomu obsługi gdy rozkłady są stacjonarne. W tym problemie występują trzy możliwości, mianowicie są to sytuacje gdy:

- wymiar rozkładu popytu w czasie jest krótszy od długości cyklu uzupełniania zapasu;
- wymiar rozkładu popytu w czasie jest równy długości cyklu uzupełniania zapasu;
- wymiar rozkładu popytu w czasie jest dłuższy od długości cyklu uzupełniania zapasu.

Oczywiście w najprostszym przypadku równości, rozkład popytu w cyklu uzupełniania zapasu jest identyczny jak rozkład w wymiarze czasowym popytu. W pozostałych dwóch przypadkach należy wyznaczyć rozkład popytu w cyklu uzupełniania zapasu.

Jeżeli wymiar czasowy rozkładu popytu jest krótszy od długości cyklu uzupełniania zapasu, to rozkład popytu w cyklu jest rozkładem sumy niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, takim jak rozkład popytu w czasie. Tutaj dla rozkładu normalnego będzie to rozkład normalny, dla Poissona rozkład Poissona, a dla gamma rozkład gamma (Ross, 2010). Jednak suma zmiennych losowych wykładniczych nie ma już niestety rozkładu wykładniczego a rozkład gamma. Oczywiście trzeba pamiętać, że wartość oczekiwana sumy zmiennych losowych (równa wartości oczekiwanej popytu w cyklu) równa się sumie wartości oczekiwanych popytu w czasie. Również wariancja sumy niezależnych zmiennych losowych równa się sumie wariancji tych zmiennych. Z tego powodu dla każdego z typowych rozkładów popytu, ze znanych wzorów można wyznaczyć zarówno poziom obsługi popytu α, jak i stopień ilościowej realizacji zamówień β. Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego wiadomo, że przy dużej liczbie zmiennych losowych rozkład sumy zmierza do rozkładu normalnego, i można zastosować wzory na poziom obsługi dla tego rozkładu.

W przypadku gdy wymiar czasowy rozkładu popytu jest dłuższy od długości cyklu uzupełniania zapasu nie zawsze można ustalić rozkład popytu w cyklu uzupełniania zapasu. Od dawna znane są w rachunku prawdopodobieństwa dwa twierdzenia Craméra i Rajkowa z których należy w tym przypadku skorzystać. Ich treść brzmi następująco (por. Stoyanov, 1999, str. 117):

Twierdzenie Craméra (1936)

Jeżeli suma $X_1 + X_2$ zmiennych losowych X_1 i X_2 ma rozkład normalny i te zmienne losowe są niezależne, to każda zmienna losowa X_1 i X_2 ma rozkład normalny.

Twierdzenie Rajkowa (1938)

Jeżeli X_1 i X_2 są nieujemnymi zmiennymi losowymi o wartościach całkowitych takimi, że suma $X_1 + X_2$ ma rozkład Poissona oraz X_1 i X_2 są niezależne, to każda ze zmiennych losowych X_1 i X_2 ma rozkład Poissona.

Z twierdzenia Craméra wynika, że jeżeli rozkład popytu w czasie jest rozkładem normalnym, to rozkład popytu w cyklu uzupełniania zapasu (krótszym) będzie również rozkładem normalnym z odpowiednimi parametrami. Podobnie sytuacja przedstawia się dla rozkładu Poissona. Mianowicie z prawa Rajkowa można wywnioskować, że jeżeli rozkład popytu w czasie jest rozkładem Poissona, to rozkład popytu w cyklu będzie również rozkładem Poissona. Inaczej jest dla rozkładu popytu w czasie typu gamma. Wówczas nie zachodzi twierdzenie Rajkowa i rozkład popytu w cyklu uzupełnienia zapasu jest nieznany, i nie musi być rozkładem gamma (Burgin, 2011). Zauważmy, że ostatnia uwaga dotyczy również rozkładu wykładniczego, który jest szczególnym przypadkiem rozkładu gamma. Poniżej przedstawiono skorygowaną tablicę możliwości i ograniczeń w obliczaniu poziomu obsługi popytu α i stopnia ilościowej realizacji zamówień β (por. Czajka i Gdowska, 2013).

Table 1 Możliwości wyznaczenia poziomów obsługi klienta na podstawie rozkładu popytu w czasie

Rozkład popytu	Cykl krótszy od wymiaru popytu w czasie	Cykl równy wymiarowi popytu	Cykl dłuższy od wymiaru popytu w czasie
normalny	możliwe	możliwe	możliwe
gamma	niemożliwe	możliwe	możliwe
Poissona	możliwe	możliwe	możliwe

W związku z powyższym widać, że obliczenie poziomu obsługi popytu oraz stopnia ilościowej realizacji zamówień jest niemożliwe tylko w jednym przypadku, gdy cykl uzupełniania zapasu jest krótszy od wymiaru czasowego rozkładu popytu i ponadto popyt w czasie ma rozkład gamma (w szczególnym przypadku wykładniczy). Powodem jest to, że z twierdzenia Burgina (2011) nie można wówczas wyznaczyć rozkładu popytu w cyklu uzupełniania zapasu mimo znanego rozkładu popytu w czasie.

5. PODSUMOWANIE

Potrzeby marketingowe wymagają, aby każdy klient został obsłużony w miarę możliwości na jak najwyższym poziomie obsługi. Poziom ten można mierzyć wieloma różnymi wskaźnikami. Celem pracy jest omówienie dwóch najpopularniejszych mierników poziomu obsługi: poziomu obsługi popytu i stopnia ilościowej realizacji zamówień. W miarach tych zakłada się losowość popytu, a dokładniej, że popyt jest zadany pewnym rozkładem prawdopodobieństwa ze znanymi parametrami. Przy stochastycznym popycie najczęściej rozważanymi rozkładami dobrze modelującym zjawiska ekonomiczne są rozkłady ciągłe: rozkład normalny i gamma dla produktów szybko rotujących oraz dyskretny rozkład Poissona dla produktów wolno rotujących. Dla tych typowych rozkładów popytu zacytowana jest i uproszczona postać wskaźników obsługi klienta. Rozważane poziomy obsługi obliczone są na podstawie teorii rachunku prawdopodobieństwa. Poziom obsługi popytu oznacza prawdopodobieństwo nie wyjścia z zapasu podczas gdy stopień ilościowej realizacji zamówień mierzony jest za pomocą oczekiwanej liczby braków. Badane są również ograniczenia w stosowaniu powyższych wzorów w zależności od tego czy wymiar rozkładu popytu w czasie jest dłuższy od długości cyklu uzupełniania zapasu. W tym miejscu wykorzystane są znane twierdzenia probabilistyczne. Poniżej przedstawione są podstawowe wnioski z pracy.

Wnioski:

1. Znając punkt ponownego zamówienia lub współczynnik bezpieczeństwa oraz rozkład, który aproksymuje losowy popyt, można w większości przypadków wyznaczyć miary poziomu obsługi klienta typu α i β.
2. Rozkład popytu w czasie w znaczący sposób wpływa na postać wskaźników obsługi klienta.
3. W przypadku gdy wymiar czasowy rozkładu popytu jest krótszy od długości cyklu uzupełniania zapasu można wyznaczyć nowe rozkłady w cyklu uzupełniania zapasu dla wszystkich typowych rozkładów popytu przy dowolnej liczbie sumowanych zmiennych losowych reprezentujących popyt.
4. Tylko w jednym przypadku nie ma możliwości wyznaczyć miar obsługi klienta. Dzieje się to gdy wymiar czasowy rozkładu popytu jest dłuższy od długości cyklu uzupełniania zapasu i rozkład popytu w czasie jest rozkładem gamma.

Streszczenie

W pracy rozpatrywane są możliwości wyznaczenia poziomu obsługi klienta w modelach zarządzania zapasami z losowym popytem. Rozważane są trzy typowe rozkłady popytu, mianowicie rozkłady ciągłe: rozkład normalny i rozkład gamma oraz dyskretny rozkład Poissona. Dla tych rozkładów przytoczone są i uproszczone wzory na obliczenie poziomu obsługi popytu I stopnia lościowej realizacji zamówień. Do wyznaczenia tych wielkości konieczna jest znajość rozkładu popytu w cyklu uzupełniania zapasu. Badana jest możliwość znalezienia rozkładu popytu w cyklu ze znanego rozkładu popytu w czasie. Podany jest również przykład obliczeniowy.

Słowa kluczowe: poziom obsługi klienta, oczekiwana liczba braków, stochastyczny popyt, czas uzupełniania zapasu, punkt ponownego zamówienia, stopień ilościowej realizacji zamówień

Cycle service level and fill rate for various demand distributions

Abstract

In the paper the possibility of deriving certain measures of service level in the classical stochastic inventory models is studied. The most popular probabilistic demand distributions are considered, namely continuous normal and gamma distribution and discreet Poisson distribution. For the mentioned distributions the probability of no stockout called cycle service level and the fill rate are cited and simplified. In order to compute these quantities the knowledge of the demand distribution in the lead time is necessary. The possibility of calculation of the lead time distribution given the demand distribution in time is also considered. Finally some computational examples are presented.

Key words**:** service level, expected backorders, stochastic demand, lead time, reorder point, fill rate.

LITERATURA

[1] Abd El-Fatah I.M., Mead M.E., Semary H.E., The applications of the modified generalized gamma distribution in inventory control, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 6, 35, 1699-1712, 2011.
[2] Axsäter S., Inventory control, 2nd edition, International Series in Operations Research and Management Science, Springer, 2006.
[3] Bartman D., Beckmann M.J., Inventory control, Springer-Verlag, 1992.
[4] Bertazzi L., Bosco A., Lagan D., Managing stochastic demand in an inventory routing problem with transportation procurement, Omega, w druku, dostępny online 16 października 2015.
[5] Burgin T. A., Cramér theorem for Gamma random variables, Electronics Communication in Probability, 16, 1, 365-378, 2011.
[6] Cyplik P., Przegląd metod zarządzania zapasami, Logistyka, 1, 23-27, 2003.
[7] Cyplik P., Zastosowanie klasycznych metod zarządzania zapasami do optymalizacji zapasów magazynowych - case study, LogForum, 1, 3, 4, 1-11, 2005.
[8] Czajka K., Gdowska K., Ograniczenia praktycznego wykorzystania klasycznych metod zarzadzania zapasami, Logistyka, 4, 76-84, 2013.
[9] Govindan K., The optimal replenichment policy for time-varying stochastic demand under vendor managed inventory, European Journal of Operational Research, 242, 2, 402-423, 2015.
[10] Ghiani G., Laporte G., Musmanno R., Introduction to logistics systems planning and control, Wiley and Sons, England, 2004.
[11] Guijarro E., Cardos M., Babiloni E., On the exact calculation of the fill rate in a periodic review inventory policy under discreete demand patterns, European Journal of Operational Research, 218, 442-447, 2012.
[12] Klugman S., Panjer H. H., Wilmot G. E., Loss Models, From data to decisions, Wiley & Sons, 2004.
[13] Krzyżaniak S., Podstawy zarządzania zapasami w przykładach. ILiM Poznań, 2002.
[14] Krzyżaniak S., Poziom obługi w gospodarce zapasami, Logistyka, 1, 2003.
[15] Mokrzycka E., Magazynowanie i obsługa zapasów w Kompendium wiedzy o logistyce, PWN Warszawa, Poznań 1999.
[16] Prak D., Teutner R., Riezebos J., Periodic review and continuous ordering, European Journal of Operational Research, 242, 3, 820-827, 2015.
[17] Ross S., A first course on probability. Prentice Hall, New York, 2010.
[18] San-Jos L. A., Sicilia J., Garca-Laguna J., Analysis of an EOQ inventory model with partial backordering and non-linear unit holding cost, Omega, 54, 2015, 147-157.
[19] Silver, E.A., Bishak D.P., The exact fill rate in a periodic review base stock system under normally distributed demand, Omega, 39, 346-349, 2011.
[20] Silver, E.A., Pyke D.F., Peterson R., Inventory Management and Production Planning and Scheduling Wiley, New York 1998.
[21] Stoyanov J.M., Counterexamples in probability, Kluwer, Boston, MA, 311-360, 1999.
[22] Tempelmeyer H., Inventory service-levels in the customer supply chain, OR Spectrum 22, 361-380, 2000.
[23] Teunter R.H., Note on the fill rate of single-stage general periodic review inventory systems, Operations Research Letters, 37, 67-68, 2009.
[24] Tymińska, Sterowanie zapasami w przedsiębiorstwie z uwzględnieniem aspektu ryzyka i niepewności, Logistyka, 6, 2-8, 2012.
[25] Wheatley D., Inventory-location problems for spare parts with time based service constraints, Phd thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada, 2014.
[26] Zipkin, P. H., Foundations of Inventory Management, McGraw-Hill, Singapore, 2000.