

Marcin KLIMEK*, Piotr ŁEBKOWSKI**

ALGORYTM DLA PROBLEMU LOSOWEGO PRZYDZIAŁU PERSONELU

Streszczenie

Artykuł prezentuje problem losowego przydziału personelu, który występuje w rzeczywistej firmie. Sformułowano model matematyczny dla tego zagadnienia. Następnie zaproponowano algorytm priorytetowy rozwiązujący problem losowej alokacji personelu. Na koniec przedstawiono przykład ilustrujący działanie algorytmu.

Słowa kluczowe: problem losowego przydziału personelu, algorytm priorytetowy

1. WPROWADZENIE

Problem przydziału personelu do stanowisk pracy to ważne zagadnienie związane z organizacją pracy. Kryterium oceny tego przydziału jest np. osiągnięcie maksymalnej wydajności personelu lub obsadzenie wszystkich miejsc pracy przy uwzględnieniu uprawnień i umiejętności pracowników.

Zapewnienie obsady miejsc pracy jest szczególnie istotne w pewnej firmie, w której występują specyficzne wymagania odnośnie alokacji pracowników do stanowisk. W firmie tej zachodzi konieczność losowego przydziału pracowników do stanowisk obsługi. Wynika to z faktu, że potencjalni klienci nie powinni wiedzieć przez kogo będą obsłużeni. Takie losowe alokowanie pracowników zmniejszy potencjalne ryzyko zachowań korupcyjnych.

Nie znaleziono w literaturze rozważań, które dotyczyłyby losowego przydziału personelu. Rozważany jest natomiast ogólny problem przydziału (ang. *General Assignment Problem*) [4], który sprowadza się do przypisania członków jednej grupy obiektów (np. pracowników) do członków innej grupy (np. zadań, stanowisk). Szczególnym przypadkiem jest klasyczny problem alokacji personelu (ang. *Standard Assignment Problem, Personnel Assignment Problem*) [2]. Problem jest opisywany jako graf dwudzielny (ang. *bipartite graph*). Rozłączne części grafu, między którymi wewnątrz nie ma połączeń, stanowią zbiór zawierający węzły reprezentujące pracowników i zbiór zawierający węzły reprezentujące stanowiska. Między personelem a stanowiskami występują łuki z przypisaną wagą. Wagi połączeń pracowników z stanowiskami określają produktywność (wydajność) pracownika przy realizacji zadań na danym stanowisku. W klasycznym problemie liczba stanowisk jest równa liczbie przydzielanych pracowników oraz każdy z pracowników jest połączony z każdym z stanowisk. Każdy z pracowników jest przypisywany do jednego stanowiska (wykonuje jedno zadanie). Do każdego z miejsc pracy (zadania) przypisywany jest dokładnie jeden pracownik. Szukanym rozwiązaniem jest taki zbiór przyporządkowań (łuków łączących pracowników ze stanowiskami), dla którego zmaksymalizowana jest wydajność pracy mierzona jako suma wag wybranych połączeń. Znane są algorytmy, które rozwiązują

* Państwowa Szkoła Wyższa w Białej Podlaskiej, Instytut Informatyki

** Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Zarządzania

dokładnie klasyczny problem alokacji zasobów w czasie wielomianowym [1,2,5,6]. Modyfikacje klasycznego problemu sprowadzają się do określania dodatkowych ograniczeń [2,3] np. uwzględnienia hierarchii (ang. *hierarchy constraint*) stanowisk i pracowników (np. problem przydziału stanowisk w wojsku), uwzględnienia miejsca wykonywania pracy zespołu (ang. *team constraint*) na stanowiskach (zespół przydzielany w tej samej lokalizacji, mieście) itp.

W niniejszym artykule zaprezentowany jest model matematyczny problemu losowego przydziału personelu. Problem jest formułowany na podstawie wymagań rzeczywistego systemu obsługi w analizowanej firmie. Model matematyczny jest budowany przy wykorzystaniu klasycznego modelu przydziału personelu. Następnie dla sformułowanego modelu losowej alokacji personelu zaproponowano algorytm heurystyczny rozwiązujący rozważane zagadnienie.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Problem losowego przydziału pracowników do stanowisk obsługi sprowadza się do maksymalizacji liczby obsadzonych stanowisk przy równoczesnym zapewnieniu losowości tej alokacji.

Niech st oznacza liczbę różnych typów obsadzanych stanowisk pracy. Dla każdego typu stanowiska pracy i ($i = 1..st$) określona jest nieujemna liczba stanowisk do obsadzenia w drodze losowania oznaczona m_i ($m_i > 0$ dla każdego $i = 1..st$). Liczba wszystkich stanowisk obsługi, które są obsadzone w drodze losowania wynosi m :

$$m = \sum_{i=1}^{st} m_i \quad (1)$$

Wszystkie stanowiska obsługi są ponumerowane od 1 do m . Numerowane są kolejne typy stanowisk od 1 do st :

$$1, \dots, m_1, m_1+1, \dots, m_1 + m_2, \dots, m_{st-1} + m_{st}$$

Ostatni element ($m_{m-1} + m_m = m$).

Każdy z pracowników posiada uprawnienia do pracy na określonych stanowiskach. Niech n oznacza liczbę przydzielanych pracowników, natomiast U_i ($i = 1..n$) to zbiór uprawnień do typów stanowisk, które posiada pracownik i .

$$U_i = \{j : upr_{ij} = 1\} \quad \forall j \in \langle 1, st \rangle \quad (2)$$

gdzie:

upr_{ij} – zmienna zerojedynkowa określająca uprawnienia pracownika: $upr_{ij} = 1$ oznacza, że pracownik i posiada uprawnienia do stanowiska j , natomiast upr_{ij} przyjmuje wartość 0, gdy pracownik i nie posiada uprawnień do stanowiska j .

$$\forall i \in \langle 1, s \rangle, \forall j \in \langle 1, n \rangle \quad upr_{ij} \in \{0,1\} \quad (3)$$

Każdy ze zbiorów uprawnień jest niepusty ($\#U_i > 0$ dla każdego $i = 1..n$) – pracownik bez uprawnień nie jest w ogóle rozważany przy losowaniu stanowisk. W większości przypadków

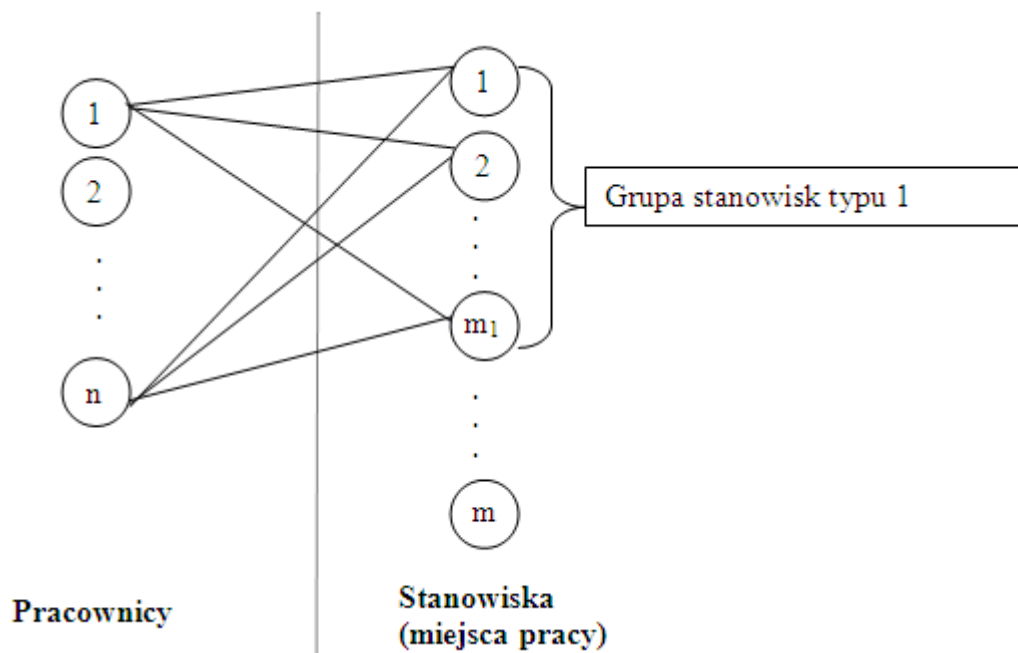
w analizowanym systemie obsługi liczba pracowników jest większa lub równa liczbie losowanych stanowisk ($n > m$). Pracownicy nieobsadzeni w drodze losowania przydzielani są na stanowiska, które nie wymagają losowości (są to tak zwane stanowiska „niekorupcyjne”).

Dla każdego typu stanowiska $i = 1..m$ można wyliczyć liczbę pracowników, którzy mogą na nim pracować LU_i zgodnie z wzorem (8):

$$LU_i = \sum_{j=1}^n u_{pr_{ij}} \quad (8)$$

Jeśli zachodzi nierówność ($m_i > LU_i$) nie jest możliwe obsadzenie wszystkich stanowisk typu i , ze względu na zbyt małą liczbę uprawnionych pracowników.

Analizowane zagadnienie można przedstawić jako graf dwudzielny, podobnie jak w klasycznym modelu przydziału personelu. Graf dwudzielny dla problemu przydziału n pracowników do m stanowisk pracy przedstawiony jest na rysunku 1.



Rys. 1. Graf dwudzielny dla problemu alokacji n pracowników do m stanowisk

Źródło: opracowanie własne

Każdy pracownik ma dostęp (lub brak dostępu) do wszystkich stanowisk danego typu. Na przykład: tak jak na rysunku 1 pracownik 1 posiada uprawnienia do wszystkich stanowisk typu 1 (od 1 do m_1) a pracownik 2 nie posiada uprawnień do żadnego z stanowisk typu 1. Pracownik i jest połączony łukiem ze stanowiskiem j , tylko w przypadku gdy posiada uprawnienia do pracy na tym stanowisku ($u_{pr_{ij}} = 1$).

Szukanym rozwiązaniem problemu jest obsadzenie możliwie największej liczby stanowisk, czyli maksymalizacja funkcji F określonej wzorem (4):

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} \quad (4)$$

gdzie:

x_{ij} – zmienna decyzyjna, zerojedynkowa: $x_{ij} = 1$ oznacza, że do stanowiska i przydzielono pracownika j , natomiast x_{ij} przyjmuje wartość 0 gdy pracownik j nie jest przypisany do stanowiska i :

$$\forall i \in \langle 1, m \rangle, \forall j \in \langle 1, n \rangle \quad x_{ij} \in \{0,1\} \quad (5)$$

Problem maksymalizacji F jest rozwiązywany przy następujących ograniczeniach:

a) Pracownik może być przydzielony maksymalnie do jednego stanowiska pracy.

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \langle 1, n \rangle \quad (6)$$

b) Jedno stanowisko pracy może być obsadzone przez maksymalnie jednego pracownika.

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in \langle 1, m \rangle \quad (7)$$

Oczywiście zachodzi $F \leq m$. Funkcja F przyjmie maksymalną wartość (jej osiągnięcie nie zawsze jest możliwe), gdy wszystkie stanowiska są obsadzone ($F = m$).

3. ALGORYTM LOSOWEGO PRZYDZIAŁU PERSONELU DO STANOWISK

Problem losowego przydziału pracowników do stanowisk obsługi sprowadza się do maksymalizacji liczby obsadzonych stanowisk.

Wymaganą cechą szukanego algorytmu rozwiązującego problem losowej alokacji jest możliwość wygenerowania każdego z optymalnych rozwiązań. Jeśli istnieje wiele alokacji o identycznej funkcji celu F wszystkie te przydziały powinny być osiągalne przy zastosowaniu tego algorytmu, najlepiej z takim samym prawdopodobieństwem. Algorytm powinien wygenerować przydział dla wszystkich losowanych stanowisk, o ile jest to możliwe, i zapewnić losowość tego przydziału (każde uruchomienie algorytmu tworzy losowy przydział stanowisk, niezależny od wyników poprzedniego losowania).

Inną ważną cechą szukanego algorytmu musi być krótki czas działania. Pracownicy mogą rozpocząć pracę dopiero po przydzieleniu im stanowisk. Każda zwłoka generuje straty dla firmy. Ze względu na wymagany krótki czas obliczeń opracowano prosty algorytm konstrukcyjny działający w oparciu o prosty mechanizm priorytetowania.

Proponowany algorytm losowego przydziału pracowników do stanowisk działa następująco:

Krok 1:

Tworzona jest losowa permutacja Π wszystkich pracowników wyznaczonych do pracy. Zapewni to losowość przydziału pracowników do stanowisk, niezależnie od dalszej części algorytmu.

Krok 2:

Wyliczane są priorytety przydziału dla poszczególnych typów stanowisk według wzoru (8):

$$P_i = LU_i - m_i \quad \forall i \in \langle 1, st \rangle \quad (8)$$

Krok 3:

Przydział pracownika do stanowiska o najniższej aktualnej wartości priorytetu P_i (uwaga: priorytety P_i są inicjalizowane w kroku 2 i modyfikowane w kroku 4). Przydzielany jest pierwszy pracownik z listy Π , który ma uprawnienia do pracy na stanowisku i . Jeśli nie znaleziono pracownika (analizując kolejno wszystkich z listy Π) o uprawnieniach do stanowiska i , stanowisko to jest nieobsadzone i nie jest już rozważane podczas dalszego działania algorytmu.

Krok 4:

Usunięcie pracownika k z listy Π (nie będzie już przydzielany do żadnego stanowiska). Modyfikacja priorytetów P_i (zmniejszenie wartości o 1) dla typów stanowisk, do których miał uprawnienia przydzielony pracownik k z uwzględnieniem liczby już obsadzonych stanowisk.

$$P_i = LUA_i - m_i + l_i \quad \forall i \in \langle 1, st \rangle \quad (9)$$

gdzie:

l_i – liczba aktualnie obsadzonych stanowisk typu i ,

LUA_i – liczba pracowników znajdujących się aktualnie na liście Π z uprawnieniami do stanowisk typu i .

Jeśli liczba obsadzonych pracowników na danym typie stanowiska l_i jest równa liczbie pracowników do przydzielenia na tym stanowisku m_i , ten typ stanowiska jest już obsadzony i nie jest już rozważany podczas dalszego działania algorytmu.

Krok 3 i Krok 4 są powtarzane aż do momentu, w którym wszystkie stanowiska są już obsadzone lub są wykluczone z obsadzania, gdyż nie można znaleźć dla nich pracowników z uprawnieniami.

Zaprezentowany algorytm priorytetowy jest wdrożony w działającym systemie obsługi analizowanej firmy. Spełnia swoje zadania. Jest bardzo wydajny, szybki, co jest istotną cechą, gdyż jest wywoływany codziennie przed rozpoczęciem pracy. Algorytm w sposób losowy znajduje w większości sytuacji pełną obsadę miejsc pracy.

4. PRZYKŁAD ILUSTRUJĄCY DZIAŁANIE ALGORYTMU LOSOWEGO PRZYDZIAŁU

W celu zaprezentowania działania algorytmu losowego przydziału personelu do stanowisk przedstawiony jest następujący przykład ilustracyjny:

1) Występują dwa typy stanowisk do obsadzenia:

stanowisko typu 1 – liczba miejsc pracy: 2,

stanowisko typu 2 – liczba miejsc pracy: 1,

2) Przydzielanych jest pięciu pracowników z następującymi uprawnieniami do różnych typów stanowisk:

pracownik 1 – z uprawnieniami do stanowiska typu 1,

pracownik 2 – z uprawnieniami do stanowiska typu 1 i 2,

pracownik 3 – z uprawnieniami do stanowiska typu 2,

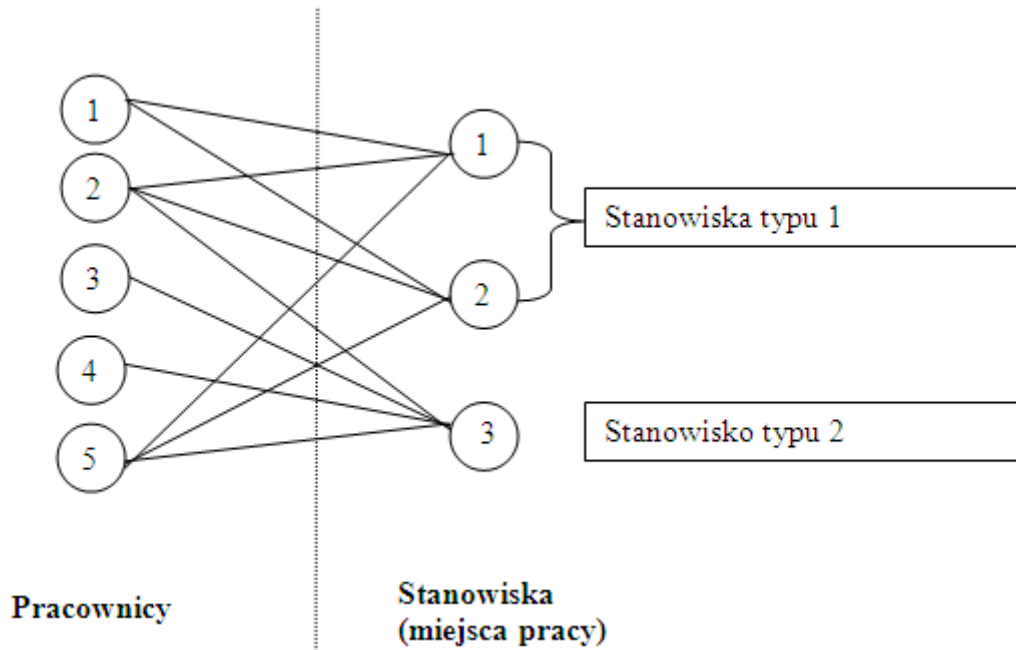
pracownik 4 – z uprawnieniami do stanowiska typu 2,
 pracownik 5 – z uprawnieniami do stanowiska typu 1 i 2.

Dane są następujące:

$$n = 2, m = 3, st = 2, m_1 = 2, m_2 = 1,$$

$$upr_{11} = 1, upr_{12} = 0, upr_{21} = 1, upr_{22} = 1, upr_{31} = 0, upr_{32} = 1, upr_{41} = 0, upr_{42} = 1, upr_{51} = 1, upr_{52} = 1$$

Graf dwudzielny dla tak zdefiniowanego problemu alokacji przedstawiony jest na rysunku 2.



Rys. 2. Graf dwudzielny dla problemu alokacji 5 pracowników do 3 stanowisk
 Źródło: opracowanie własne

Liczba uprawnionych na poszczególnych typach stanowisk wynosi:

$$LU_1 = upr_{11} + upr_{21} + upr_{31} + upr_{41} + upr_{51} = 3$$

$$LU_2 = upr_{12} + upr_{22} + upr_{32} + upr_{42} + upr_{52} = 4$$

Algorytm losowego przydziału personelu do stanowisk przebiega następująco:

Krok 1:

Wylosowanie permutacji pracowników, np. wylosowano:

$$\Pi = \{3, 4, 2, 1, 5\}$$

Krok 2:

Obliczenie priorytetów:

$$P_1 = LU_1 - m_1 = 3 - 2 = 1$$

$$P_2 = LU_2 - m_2 = 4 - 1 = 3$$

Krok 3 i krok 4 są powtarzane w kolejnych iteracjach, aż do obsadzenia wszystkich stanowisk.

Iteracja 1:**Krok 3:**

Minimalny priorytet ma stanowisko typu 1. Szukany jest pierwszy pracownik na liście Π , który ma uprawnienia do stanowiska typu 1. Jest to pracownik 2 (pracownicy 3 i 4 nie mają uprawnień do stanowiska typu 1).

Krok 4:

Usunięcie pracownika 2 z listy Π :

$$\Pi = \{3, 4, 1, 5\}$$

Aktualizacja priorytetów dla typów stanowisk, do których miał uprawnienia pracownik 2:

$$P_1 = LUA_1 - m_1 + l_1 = 2 - 2 + 1 = 1$$

$$P_2 = LUA_2 - m_2 + l_2 = 3 - 1 = 2$$

Iteracja 2:**Krok 3:**

Minimalny priorytet ma stanowisko typu 1. Szukany jest pierwszy pracownik na liście Π , który ma uprawnienia do stanowiska typu 1. Jest to pracownik 1 (pracownicy 3 i 4 nie mają uprawnień do stanowiska typu 1).

Krok 4:

Usunięcie pracownika 1 z listy Π :

$$\Pi = \{3, 4, 5\}$$

Aktualizacja priorytetów dla typów stanowisk, do których miał uprawnienia pracownik 1:

$$P_1 = LUA_1 - m_1 + l_1 = 1 - 2 + 2 = 1$$

Po iteracji 2 liczba obsadzonych pracowników jest równa liczba miejsc pracy na stanowiskach typu 1 ($l_1 = m_1$). Zatem stanowiska typu 1 są już obsadzone i nie są już rozważane w dalszych obliczeniach.

Iteracja 3:**Krok 3:**

Minimalny priorytet ma stanowisko typu 2. Szukany jest pierwszy pracownik na liście Π , który ma uprawnienia do stanowiska typu 2. Jest to pracownik 3.

Krok 4:

Usunięcie pracownika 3 z listy Π :

$$\Pi = \{4, 5\}$$

Aktualizacja priorytetów dla typów stanowisk, do których miał uprawnienia pracownik 3:

$$P_2 = LUA_2 - m_2 + l_2 = 2 - 1 + 1 = 2$$

Po iteracji 3 liczba obsadzonych pracowników jest równa liczba miejsc pracy na stanowisku typu 1 ($l_2 = m_2 = 1$). Zatem stanowisko typu 2 jest już obsadzone i nie jest już rozważane w dalszych obliczeniach.

Po iteracji 3 algorytm kończy działanie: wszystkie typy stanowiska są już obsadzone.

5. ZAKOŃCZENIE

W artykule zaprezentowany jest problem losowego przydziału personelu do stanowisk pracy. Przedstawiony jest nowy model, dla którego zaproponowano skuteczny algorytm. Dalsze prace autorów skoncentrują się na przygotowaniu problemów testowych i przy ich

użyciu sprawdzenie wydajności opracowanej procedury. Przedmiotem dalszych analiz będzie także opracowanie innych algorytmów rozwiązujących zagadnienie losowej alokacji pracowników wraz ze zbadaniem ich złożoności obliczeniowej.

Innym kierunkiem prac będzie rozbudowa modelu, tak aby uwzględnić możliwość przypisania pracownikowi więcej niż jednego stanowiska pracy. W praktyce występuje taka sytuacja, że w danym dniu pracownik realizuje zadania w więcej niż jednym miejscu pracy. Model ten będzie musiał uwzględniać m.in. informacje o możliwości równoczesnej pracy na stanowiskach zapisane np. w macierzy powiązań między stanowiskami.

LITERATURA

- [1] Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B.: *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, 1993.
- [2] Arslanoglu Y.: *Genetic algorithm for personnel assignment problem with multiple objectives*. Thesis, Turkey, 2006.
- [3] Cimen Z.: *A Multi-Objective Decision Support Model for the Turkish Armed Forces Personnel Assignment System*. Master's Thesis. Turkey, 2001.
- [4] Cattrysse D., Van Wassenhove L.N.: *A Survey of algorithms for the generalized assignment problem*, European Journal of Operational Research, 60(3), s. 260-272, 1992.
- [5] Galil Z. *Efficient algorithms for finding maximum matching in graphs*. ACM Comp. Surv., Vol. 18, s. 23-38, 1986.
- [6] Kuhn, H.W. *The Hungarian method for the assignment problem*. Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 2, s. 83-97, 1955.
- [7] Sawik T. *Optymalizacja dyskretna w elastycznych systemach produkcyjnych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1992
- [8] Sawik T. *Badania operacyjne dla inżynierów zarządzania*. Wydawnictwa AGH, Kraków 1998.

ALGORITHM FOR RANDOM PERSONNEL ASSIGNMENT PROBLEM

Abstract

This paper presents random personnel assignment problem which is found in real company. Mathematic model for this problem is formulated. Next priority algorithm solving random personnel allocation problem is proposed. Finally an illustrative example working of this algorithm is described.

Keywords: random personnel assignment problem, heuristic algorithm, priority algorithm