

*Równania Naviera-Stokesa, stacjonarny ruch cieczy lepkiej,  
metoda sztucznej ściśliwości, siatki kartezjańskie, metoda prostych,  
zagłębienia z jedną poruszającą się ścianką*

KOSMA Zbigniew<sup>1</sup>  
KALBARCZYK Rafał<sup>2</sup>  
PIECHNIK Bartosz<sup>3</sup>

### WYZNACZANIE STACJONARNEGO RUCHU CIECZY LEPKIEJ W DWU- I TRÓJWYMIAROWYCH ZAGŁĘBIENIACH Z JEDNĄ PORUSZAJĄCĄ SIĘ ŚCIANKĄ

*Prezentowana jest efektywna metoda wyznaczania laminarnego stacjonarnego ruchu cieczy lepkiej w obszarach o skomplikowanych kształtach. Do rozwiązywania dwu- i trójwymiarowych zagadnień dla równań Naviera-Stokesa zapisanych w zmiennych pierwotnych została zastosowana metoda sztucznej ściśliwości na siatkach kartezjańskich. Zostały zaproponowane dwa numeryczne podejścia - oparte na wykorzystaniu metody prostych w połączeniu z przeniesieniem wszystkich zmiennych z granic obszarów do najbliższych węzłów równomiernych siatek obliczeniowych. Prezentowane są wyniki testowych obliczeń numerycznych dla sześciu zagłębień z jedną poruszającą się ścianką: kwadratowego, półkwadratowego, półkolistego, sześciennego, półsześciennego i półkulistego - porównane z wynikami dostępnymi w literaturze i symulacjami wykonanymi za pomocą programu Fluent.*

### SOLUTIONS OF STEADY INCOMPRESSIBLE NAVIER-STOKES EQUATIONS FOR TWO- AND THREE-DIMENSIONAL SHEAR-DRIVEN CAVITY FLOWS

*An efficient method for simulating steady laminar flows in complex geometries is presented. The artificial compressibility method was applied to solve two- and three-dimensional Navier-Stokes equations in primitive variables on Cartesian grids. Two numerical approaches were proposed in this work, which are based on the method of lines process in conjunction with transfer of all the variables from the boundaries to the nearest uniform grid knots. Some test numerical calculations for flows in square, half-square, semicircular, cubic, half-cubic and hemisphere cavities with one uniform moving wall were reported. The present results were compared with the available data in the literature and the Fluent solver numerical simulations.*

<sup>1</sup> Politechnika Radomska, Wydział Mechaniczny, 26-600 Radom, ul. Krasickiego 54.  
Tel: + 48 48 361-71-20, 361-71-29, Fax: + 48 48 361-71-32, E-mail: zbigniew.kosma@pr.radom.pl

<sup>2</sup> Politechnika Radomska, Wydział Mechaniczny, 26-600 Radom, ul. Krasickiego 54.  
Tel: + 48 48 361-71-23, 361-71-29, Fax: + 48 48 361-71-32, E-mail: rafalk.@ghnet.pl

<sup>3</sup> Politechnika Radomska, Wydział Mechaniczny, 26-600 Radom, ul. Krasickiego 54.  
Tel: + 48 48 361-71-23, 361-71-29, Fax: + 48 48 361-71-32, E-mail: bartosz\_piechnik@wp.pl

## 1. WSTĘP

Komputerowa symulacja przepływów cieczy lepkiej jest obecnie obszarem intensywnych badań naukowych, gdyż wiele rzeczywistych problemów występujących w aerodynamice niskich prędkości oraz hydrodynamice może być opisanych równaniami Naviera-Stokesa przy założeniu stałej lepkości płynu. Tak więc, niezmiennie ciągle jest obserwowany rozwój zaawansowanych metod rozwiązywania zagadnień wyznaczania ruchu cieczy lepkiej, charakteryzujących się dużą efektywnością i dokładnością.

Fundamentalną trudnością pojawiającą się przy rozwiązywaniu równań Naviera-Stokesa zapisanych w zmiennych pierwotnych jest brak pochodnej względem czasu w równaniu ciągłości, co ogranicza zastosowanie numerycznych metod bezpośredniego całkowania w czasie. W konsekwencji, powstają zasadnicze trudności w określeniu sprzężenia zmian pola prędkości ze zmianami pola ciśnienia przy jednoczesnym zachowaniu w trakcie obliczeń numerycznych warunku spełnienia równania ciągłości. Większość opracowanych metod numerycznych przeznaczonych do rozwiązywania równań Naviera-Stokesa wymaga rozwiązywania równania Poissona dla ciśnienia na każdym kroku czasowym, co stanowi największą część czasu obliczeń numerycznych. Dla zwiększenia efektywności i zakresu zastosowań technik komputerowych do symulacji numerycznej inżynierskich zagadnień przepływowych, jest pożądane wykorzystanie innych, mniej czasochłonnych metod numerycznych, cechujących się pożądaną dokładnością. Metoda sztucznej ściśliwości, w której unika się rozwiązywania równania Poissona dla ciśnienia, wydaje się być jedną z takich metod.

Można aktualnie stwierdzić, że techniki komputerowej mechaniki płynów oferują rozmaite algorytmy, które w coraz to większym stopniu mogą być zastosowane do szerokiego zakresu praktycznych zagadnień inżynierskich w coraz to bardziej skomplikowanych geometriach. Z tego powodu - pomimo faktu, że siatki strukturalne i niestructuralne dyskretyzacji obszarów są szeroko wykorzystywane w tych zastosowaniach - potrzeba rozwijania dokładnych i efektywnych generatorów innego rodzaju siatek jest jednakże ciągle istotna.

W większości zagadnień przepływowych o praktycznym znaczeniu występuje jedna lub wiele stref recyrkulacyjnych, powodujące znaczne zwiększenie trudności wykonywania symulacji numerycznych o zadowalającej dokładności. Modele numeryczne umożliwiające wyznaczanie takich przepływów z dużą dokładnością są ciągle potrzebne. Algorytmy obliczeniowe, oparte zwykle na dyskretyzacji obszarów metodami objętości skończonych, elementów skończonych lub różnic skończonych, nie pozwalają na uzyskanie rozwiązania dokładnego, gdyż wprowadzają matematyczne i numeryczne niedokładności. Tak więc, uzyskane ostateczne rozwiązanie zawiera różnego rodzaju błędy i niezbędne jest testowanie oraz weryfikowanie modelu matematycznego przez jego porównanie z wynikami badań eksperymentalnych lub wynikami innych obliczeń numerycznych.

Artykuł został podzielony na pięć rozdziałów, z których pierwszy jest wprowadzeniem, drugi - zawiera ogólne sformułowanie metody sztucznej ściśliwości. W rozdziale trzecim omawiane są szczegóły obliczeń numerycznych, czwarty jest poświęcony podsumowaniu wcześniej wykonywanych obliczeń numerycznych i prezentacji nowych wyników. Konkluzje zebrane zostały w rozdziale piątym.

## 2. METODA SZTUCZNEJ ŚCIŚLIWOŚCI

Metoda sztucznej ściśliwości polega na dodaniu do równania ciągłości pochodnej ciśnienia względem czasu. W konsekwencji, równania opisujące ruch cieczy lepkiej można zapisać we współrzędnych kartezjańskich w następującej postaci bezwymiarowej [1-3]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} V_i V_j = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} V_i,$$

gdzie  $V_i$  są składowymi wektora prędkości,  $p$  jest ciśnieniem,  $\text{Re}$  - liczbą Reynoldsa,  $\beta > 0$  - parametrem charakteryzującym sztuczną ściśliwość.

Rezultaty obliczeń pośrednich dla tak sformułowanego wariantu metody sztucznej ściśliwości nie mają fizykalnego znaczenia, ponieważ postulat zachowania masy jest spełniony dopiero dla stanu ustalonego. Jest jednakże możliwe rozważanie ciągłych zmian czasu fizycznego. Równania ruchu cieczy lepkiej stają się w ten sposób równaniami o charakterze hiperbolicznym z pseudo-ciśnieniowymi falami propagowanymi ze skończoną prędkością. Parametr sztucznej ściśliwości  $\beta$  reprezentuje sztuczną prędkość dźwięku i wpływa na globalne przyspieszenie zbieżności procesu iteracyjnego. Poprzez wykonanie szeregu eksperymentów numerycznych najkorzystniejsze okazało się przyjęcie tego parametru z przedziału  $\beta = 0.8 \div 1$ , takie stałe wartości są zadawane jako niezmiennicze w całym obszarze rozważanego przepływu.

Fizyczne warunki brzegowe dla równań ruchu cieczy lepkiej (1) w zmiennych pierwotnych wyrażają nieprzenikalność oraz brak poślizgu na ściankach ciał stałych. Ciśnienie nie jest zwykle zadawane na brzegu lecz jest określane z równań zachowania momentu pędu i może być ustalone wyłącznie w jednym punkcie obszaru.

## 3. METODOLOGIA OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Proponowaną techniką obliczeń numerycznych jest metoda prostych [4, 5]. Układ równań różniczkowych cząstkowych (1) jest przekształcany do zagadnienia początkowego dla układu równań różniczkowych zwyczajnych poprzez dyskretyzację wszystkich pochodnych względem zmiennych przestrzennych łącznie z warunkami brzegowymi dla pochodnej ciśnienia za pomocą ilorazów różnicowych drugiego rzędu. W ten sposób uzyskujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych w postaci ogólnej

$$\frac{dU}{dt} = F(U), \quad (2)$$

gdzie  $U = [p, V_i]^T$  jest wektorem zmiennych zależnych,  $F$  - operatorem różniczkowania przestrzennego.

Metoda prostych ma wiele zalet, spośród których jako najważniejszą można wymienić ominięcie konieczności linearyzacji członów nieliniowych, ponadto zagwarantowane są uniwersalność i prostota kodów numerycznych. Niektóre ograniczenia tej metody są związane ze sztywnością równań różniczkowych zwyczajnych i możliwością wystąpienia niekiedy niestabilności numerycznych.

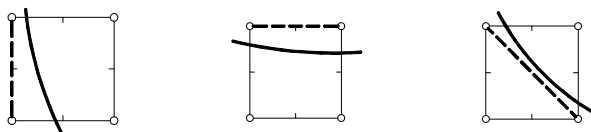
Otrzymany układ równań różniczkowych zwyczajnych (2) może być całkowany numerycznie z wykorzystaniem wielu istniejących metod. Ewolucja rozwiązania do stanu ustalonego ruchu cieczy lepkiej może być bardzo efektywnie osiągnięta jednokrokową metodą predyktor-korektor wstecznego różniczkowania [6, 7]

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= U_n + \Delta t F(U_n), \\ U_{n+1}^{(q+1)} &= U_n + \Delta t F(U_{n+1}^{(q)}) \quad (q=0,1,\dots) \end{aligned} \quad (3)$$

lub też metodą Galerkin-Rungego-Kutty trzeciego rzędu [8]

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U_n + \Delta t F(U_n), \\ U^{(2)} &= \frac{3}{4} U_n + \frac{1}{4} U^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t F(U^{(1)}), \\ U_{n+1} &= \frac{1}{3} U_n + \frac{2}{3} U^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t F(U^{(2)}). \end{aligned} \quad (4)$$

Zaproponowana została również praktyczna metodologia rozwiązywania równań Naviera-Stokesa w obszarach o skomplikowanych geometrycznie kształtach. Krzywoliniowe brzegi półkola lub półkuli są aproksymowane prostoliniowymi krawędziami lub przekątnymi łączącymi kolejne wierzchołki równomiernej siatki, najbliższymi do linii bocznych zagłębień (rys. 1). W ten sposób warunki brzegowe postawione na krzywoliniowych brzegach są przeniesione w obszarze fizycznym do najbliższych węzłów regularnej siatki o takich samych oczkach we wszystkich kierunkach. Zastosowana metodologia ma liczne zalety, w szczególności prosty i efektywny sposób generowania siatki oraz ominięcie problemów związanych ze skośnością siatki.



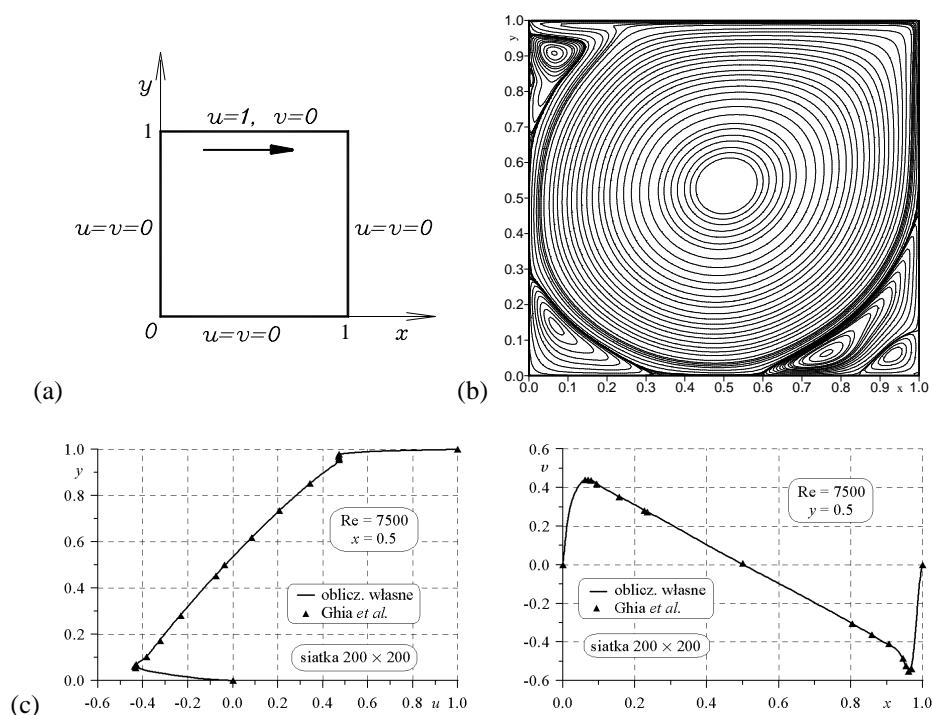
Rys. 1. Przykłady aproksymacji krzywoliniowych linii brzegowych

#### 4. WYNIKI SYMULACJI NUMERYCZNYCH

Zagadnienia ruchu cieczy lepkiej w zagłębieniach z górną poruszającą się ścianką mają ważne znaczenie ponieważ można znaleźć szereg przykładów przemysłowych urządzeń, w których tego rodzaju przepływy i struktury odgrywają zasadniczą rolę. Zainteresowanie

przepływami w zagłębieniach jest spowodowane także ich prostą geometrią oraz warunkami brzegowymi typu Dirichleta. Jednakże wewnątrz zagłębień fizyka przepływów nie jest prosta. Może w nich występować jednocześnie kilka charakterystycznych cech przepływu, które często występują w procesach przemysłowych - takie jak warstwy przyścienne, wiry różnych rozmiarów i rozmaite niestabilności. Ponadto rezultaty numeryczne dla zagłębień trójwymiarowych nie są liczne. W odróżnieniu od zagadnień dwuwymiarowych, przepływy w zagłębieniach trójwymiarowych są bogate w skomplikowane zjawiska fizyczne. Zasadniczym jednakże rozpowszechnienie się badań takich przepływów jest spowodowane ich przeznaczeniem jako zagadnień modelowych, przeznaczone do testowania opracowywanych metod numerycznych do symulacji ruchu cieczy lepkiej. Stąd też, intensywne numeryczne badania takich zagadnień są ciągle prowadzone.

Oprócz nowych wyników, w tym rozdziale prezentowane są również także rezultaty wcześniejszych obliczeń numerycznych [9] - dotyczących wyznaczenia ruchu cieczy lepkiej w trzech zagłębieniach z jedną poruszającą się ścianką: kwadratowym, półkolistym i sześciennym.



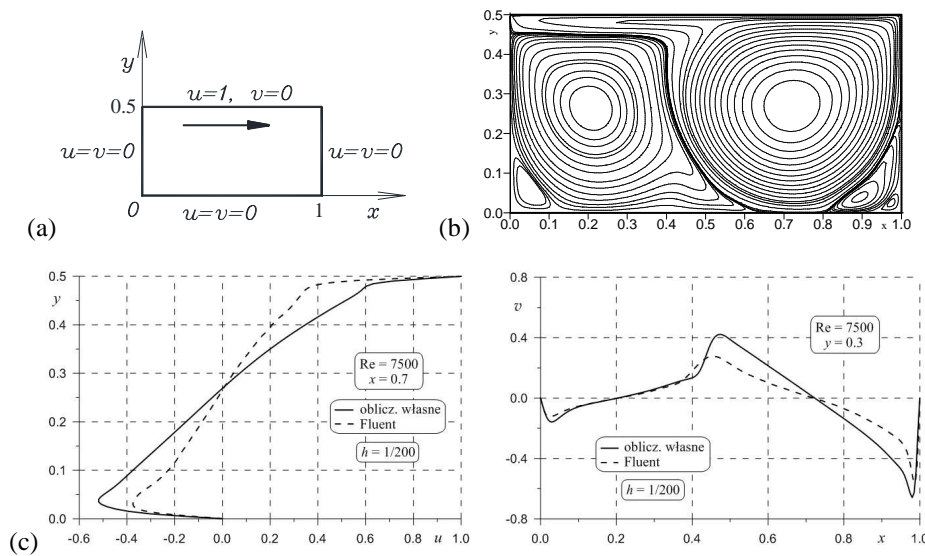
Rys. 2. Kwadratowe zagłębienie: (a) geometria i warunki brzegowe; wyniki obliczeń dla  $Re = 7500$ : (b) linie prądu, (c) rozkłady składowych prędkości  $u$  oraz  $v$  na osiach symetrii

Najczęściej badanym przez licznych autorów jest klasyczne już zagadnienie ruchu cieczy lepkiej w zagłębieniu kwadratowym (rys. 2a). Komputerowe symulacje numeryczne zostały wykonane dla liczby Reynoldsa:  $Re = 7500$  na równomiernej siatce  $200 \times 200$  i dla tej liczby Reynoldsa zostało znalezione rozwiązanie stacjonarne. Rysunek 2b przedstawia wyznaczone linie prądu, a na rysunku 2c pokazane zostało porównanie rozkładów prędkości wzdłuż pionowej i poziomej osi symetrii z analogicznymi rozkładami zaczerpniętymi z pionierskiej pracy [10].

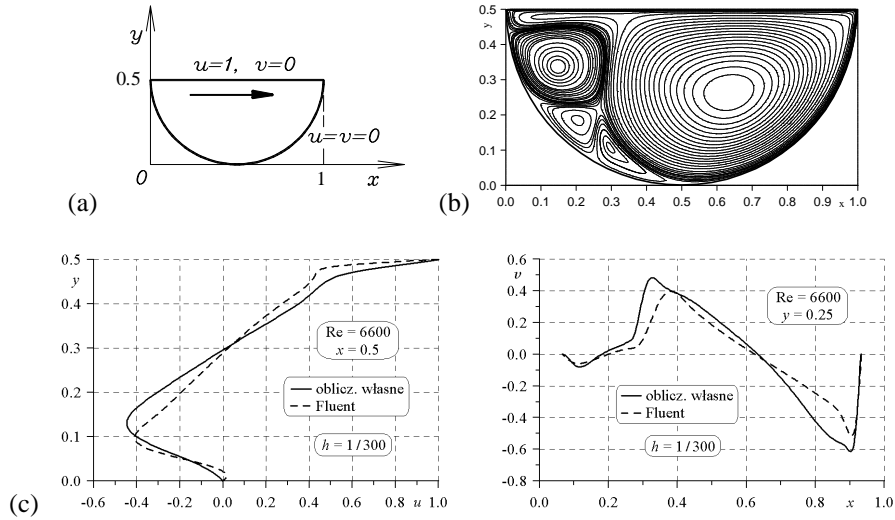
Metoda sztucznej ściśliwości została zastosowana następnie do wyznaczania laminarnego ruchu cieczy lepkiej w półkwadratowym zagłębieniu (rys. 3a) i półkolistym zagłębieniu (rys. 4a) z górną poruszającą się ścianką. Obliczenia zostały wykonane metodą Galerkiina-Rungego-Kutty (4) na równomiernych siatkach:  $200 \times 100$  dla  $Re = 7500$  - półkwadratowe zagłębienie, z oczkiem siatki  $h=1/300$  dla  $Re = 6600$  - półkolistego zagłębienia. W przypadku zagłębienia półkolistego wykorzystany został zaproponowany sposób aproksymacji krzywoliniowego brzegu (rys. 1). Całkowanie układu równań różniczkowych zwyczajnych (2) zostało zakończone po osiągnięciu stanu ustalonego, zdefiniowanego jako

$$\|\dot{U}^{n+1} - \dot{U}^n\| \leq \varepsilon_1 = 1 \cdot 10^{-12} \div 1 \cdot 10^{-13}. \quad (5)$$

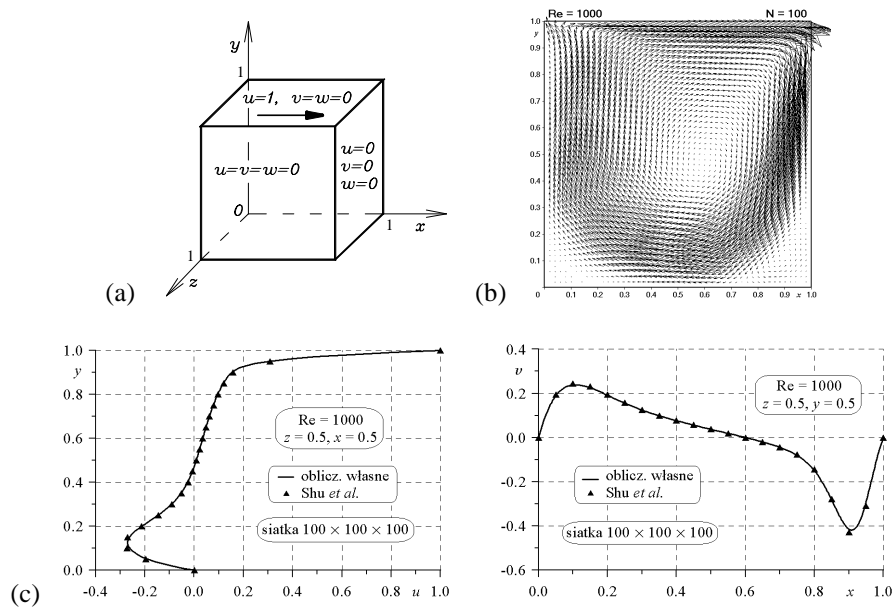
Rysunki 3b i 3c oraz 4b i 4c zawierają rezultaty obliczeń: obrazy linii prądu oraz porównania rozkładów prędkości na wybranych liniach  $x = \text{const}$  i  $y = \text{const}$  z wynikami obliczeń otrzymanymi z wykorzystaniem programu Fluent.



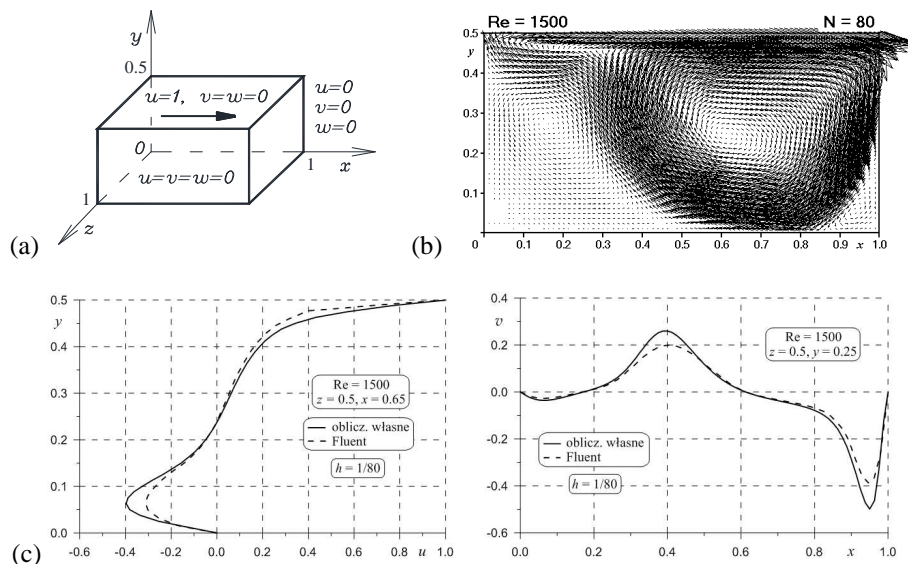
Rys. 3. Półkwadratowe zagłębienie: (a) geometria i warunki brzegowe; wyniki obliczeń dla  $Re = 7500$ : (b) linie prądu, (c) rozkłady składowych prędkości  $u$  oraz  $v$  na liniach  $x = 0.7$  i  $y = 0.3$



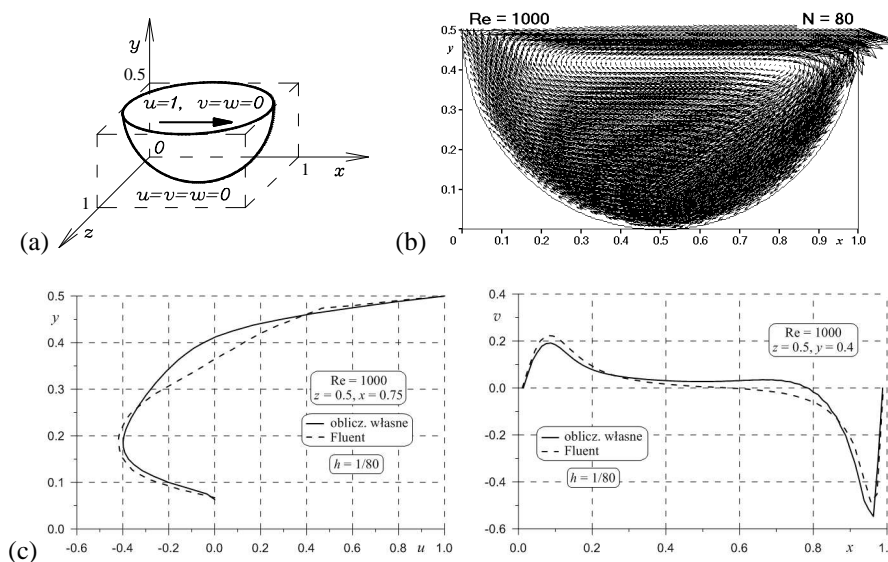
Rys. 4. Półkolistе zagłębienie: (a) geometria i warunki brzegowe; wyniki obliczeń dla  $Re = 6600$ : (b) linie prądu, (c) rozkłady składowych prędkości  $u$  oraz  $v$  na liniach  $x = 0.5$  i  $y = 0.25$



Rys. 5. Sześcienne zagłębienie: (a) geometria i warunki brzegowe; wyniki obliczeń dla  $Re = 1000$  w płaszczyźnie  $z = 0.5$ : (b) pole prędkości, (c) rozkłady składowych prędkości  $u$  oraz  $v$  na osiach symetrii



Rys. 6. Półszesciennie zagłębienie: (a) geometria i warunki brzegowe; wyniki obliczeń dla  $Re = 1500$  w płaszczyźnie  $z = 0.5$ : (b) pole prędkości, (c) rozkłady składowych prędkości  $u$  oraz  $v$  na liniach  $x = 0.65$  i  $y = 0.25$



Rys. 6. Półkuliste zagłębienie: (a) geometria i warunki brzegowe; wyniki obliczeń dla  $Re = 1000$  w płaszczyźnie  $z = 0.5$ : (b) pole prędkości, (c) rozkłady składowych prędkości  $u$  oraz  $v$  na liniach  $x = 0.75$  i  $y = 0.4$



Symulacje komputerowe w sześciennym zagłębieniu (rys. 5a) zostały wykonane na równomiernej siatce  $100 \times 100 \times 100$  dla liczby Reynoldsa:  $Re = 1000$ . Uzyskane pole prędkości w płaszczyźnie symetrii ( $z = 0.5$ ) jest pokazane na rysunku 5b. Dla potwierdzenia poprawności obliczeń na rysunku 5c zostały wykreślone porównania profili prędkości w płaszczyźnie  $z = 0.5$  z rezultatami opublikowanymi w pracy Shu *et al.* [11]: składowej  $u$  wzdłuż pionowej osi symetrii oraz składowej  $v$  wzdłuż poziomej osi symetrii.

Obliczenia w półsześciennej zagłębieniu (rys. 6a) i półkulistym zagłębieniu (rys. 7a) zostały przeprowadzone na równomiernej siatce o oczku  $h = 1/80$ , układ równań różniczkowych zwyczajnych (2) był całkowany jednokrokową metodą predyktor-korektor wstecznego różniczkowania. W większości obliczeń przyjęto następujące dane: krok czasowy równy  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$ , korekcja była powtarzana aż do osiągnięcia dokładności  $\epsilon_2 = 1 \cdot 10^{-8}$ , a proces całkowania był przerywany po osiągnięciu stanu ustalonego (5) z dokładnością  $\epsilon_1 = 1 \cdot 10^{-10}$ . Pola prędkości w płaszczyźnie symetrii oraz porównania rozkładów prędkości z rezultatami obliczeń wykonanymi za pomocą programu Fluent są prezentowane na rysunkach 6b i 6c oraz 7b i 7c.

## 5. WNIOSKI

Przedstawione algorytmy wyznaczania ruchu cieczy lepkiej oparte na wykorzystaniu metody sztucznej ściśliwości w połączeniu z metodą prostych okazały się generalnie bardzo skutecznym i dokładnym sposobem symulacji laminarnych przepływów cieczy lepkiej w zagłębieniach o różnych kształtach dla dużych liczb Reynoldsa. Stwierdzono bardzo dużą efektywność metody predyktor-korektor wstecznego różniczkowania i metody Galerkin trzeciego rzędu do całkowania układów równań różniczkowych zwyczajnych, jeśli chodzi o czasy uzyskiwania rozwiązań stacjonarnych. Bardzo dużym osiągnięciem jest też opracowanie efektywnej i praktycznej metodologii rozwiązywania zagadnień ruchu cieczy lepkiej w obszarach ograniczonych krzywoliniowymi brzegami i powierzchniami krzywoliniowymi. Zastosowane algorytmy wydają się być obiecujące biorąc pod uwagę ich złożoność obliczeniową oraz bardzo dobrą zgodność z wynikami innych obliczeń numerycznych i zadowalającą zgodność z rezultatami symulacji komputerowych wykonanymi w programie Fluent. Algorytmy te mogą być łatwo zaadaptowane do symulacji numerycznej przepływów cieczy lepkiej różnych zagadnień przepływowych o praktycznym znaczeniu. Rodzi się jednakże przy tym pytanie, które z porównanych wyników obliczeń numerycznych można uznać za dokładniejsze, czy wyniki obliczeń własnych, czy też wyniki uzyskane za pomocą programu Fluent - może to rozstrzygnąć eksperyment laboratoryjny.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Chorin A.J.: *A numerical method for solving incompressible viscous flow problems*, Journal of Computational Physics, 1967, **2**: 12-26.
- [2] Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H.: *Computational Fluid Mechanics and the Heat Transfer*, Washington, Hemisphere Publishing Corporation 1984.
- [3] Fletcher C.A.J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1: Fundamental and General Techniques*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1988.

- [4] Oymak O., Selçuk N.: *Method of lines solution of time-dependent two-dimensional Navier-Stokes equations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1996, **23**: 455-466.
- [5] *Special Issue on the Method of Lines*, Journal of Computational and Applied Matematik, 2005, **183**: 241-357.
- [6] Hairer E., Norset S.P., Wanner G.: *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, Berlin-New York, Springer-Verlag 1987.
- [7] Hairer E., Wanner G.: *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Berlin-New York, Springer-Verlag 1991.
- [8] Cockburn B., Shu C.-W.: *The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V*, Journal of Computational Physics, 1998, **141**: 199-224.
- [9] Kosma Z.: *Fast algorithms for calculations of viscous incompressible flows using the artificial compressibility method*, TASK Quarterly, 2008, **12** (No 3) 273-287.
- [10] Ghia U, Ghia K.N., Shin C.T.: *High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method*, Journal of Computational Physics, 1982, **48**: 387-411.
- [11] Shu C., Wang L., Chew Y.T.: *Numerical computation of three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations in primitive variable form by DQ method*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2003, **43**: 345-368.