

Aleksander SZWED¹
Maria WŁODARCZYK²

ANALIZA ZGINANIA BELKI ŻELBETOWEJ W ZAKRESIE NIELINIOWYM

W artykule przedstawiono sformułowanie nieliniowego zagadnienia zginania w płaszczyźnie belki żelbetowej o przekroju prostokątnym. Przykładowy element konstrukcyjny jest najbardziej rozpowszechnionym w praktyce inżynierskiej w konstrukcjach żelbetowych, co oznacza, że jest znakomitym reprezentantem w nauczaniu zarówno mechaniki, jak i konstrukcji żelbetowych. Szczegółowa analiza faz pracy konstrukcji dostarcza materiału dydaktycznego, który może być traktowany jako pomost między teorią i zastosowaniem oraz pomaga zrozumieć koncepcję stanów granicznych.

NONLINEAR ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE BEAM IN FLEXURE

Paper deals with a nonlinear analysis of reinforced concrete beam in plane bending. This structural member, being the most wide-spread element in engineering activity, makes it to be an attractive tool in learning of structural mechanics and reinforced concrete. Presented, detailed analysis of work phases in behavior bridges the theory and application and helps students to understand the concept of limit states in structural analysis and dimensioning of structures.

1. WSTĘP

W typowym procesie dydaktycznym na kierunku budowlanym pojawia się rozdźwięk między nauczaniem mechaniki konstrukcji i konstrukcji żelbetowych czy metalowych. Zwykle przedmioty teoretyczne abstrahują od zastosowań, zaś przedmioty aplikacyjne dotyczące projektowania nie wnikają w mechaniczną stronę modelowania zachowania elementów konstrukcyjnych. Można wskazać nieliczne podręczniki traktujące analizę zginania elementów prętowych w zakresie nieliniowym [1, 2], do których rzadko odwołują się wykładowcy konstrukcji żelbetowych. Niniejszy artykuł jest próbą połączenia osiągnięć mechaniki i ich zastosowania w konstrukcjach na relatywnie prostym przykładzie.

¹Warsaw University of Technology, Civil Engineering Faculty, POLAND, Warszawa 00-637, Armii Ludowej 16.
Phone: 48 22 234-56-76, e-mail: a.szwed@il.pw.edu.pl

²Politechnika Świętokrzyska, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska; 25-314 Kielce; al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, tel: + 48 41 342-41-75, e-mail: mariaaw@tu.kielce.pl

Wyprowadzimy w tej pracy zależności między momentem i krzywizną dla przekroju żelbetowej belki zginanej w płaszczyźnie. W poniższej analizie ograniczymy rozważania do przekroju prostokątnego belki, chociaż uzyskane wzory łatwo jest uogólnić na przekroje symetryczne względem płaszczyzny zginania. Rozpatrzmy także jedynie jedną warstwę zbrojenia w strefie rozciągania przekroju. Uwzględnienie kilku warstw powoduje rachunkową komplikację opisu i mnogość przypadków do rozpatrzenia faz pracy przekroju.

W przypadku betonu przyjmiemy zerową wytrzymałość na rozciąganie oraz sprężysto-plastyczny model przy ściskaniu materiału, por. prace [2, 3], które dotyczą ogólniejszego przypadku. Pominiemy efekt umocnienia materiału po zarysowaniu w obecności zbrojenia oraz poślizg między betonem i zbrojeniem. W przypadku stali zbrojeniowej założymy sprężysto-plastyczny model materiału przy ściskaniu i rozciąganiu. Założymy prawdziwość hipotezy o płaskich przekrojach zarówno przy zginaniu sprężystym jak i sprężysto-plastycznym w zakresie małych odkształceń. Wyprowadzimy wzory dotyczące zagadnienia brzegowego płaskiego zginania belek w zakresie sprężysto-plastycznym i przeprowadzimy ich dyskusję. We wnioskach podamy graficzną interpretację wyników i dyskusję zastosowań praktycznych uzyskanych zależności.

2. MODEL MATERIAŁU I ZAŁOŻENIE KINEMATYCZNE

Przyjmujemy założenie o płaskich przekrojach, które posłuży do wyprowadzenia podstawowych równań zginanej belki. Zgodnie z tym założeniem, przekroje poprzeczne belki w trakcie sprężystych i plastycznych deformacji są prostopadłe do ugiętej osi belki. Oś obojętna belki jest określona, jako położenie punktów, w których występują zerowe odkształcenia w przekroju belki. Zgodnie z powyższym, poziome przemieszczenie u punktu w odległości z od osi obojętnej, wyrażone jest zależnością kinematyczną o postaci:

$$u(x, z) = -z \operatorname{tg} \phi = -z \frac{dw(x)}{dx}, \quad (1)$$

gdzie $w(x)$ jest funkcją ugięcia osi belki. Z (1) wynikają odkształcenia:

$$\varepsilon(x, z) = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} = -z \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = z \kappa(x), \quad (2)$$

gdzie $\kappa(x)$ jest funkcją krzywizny zginanej belki.

Do opisu zachowania zginania belki przyjmujemy uproszczone jednowymiarowe modele betonu i stali. W przypadku betonu pomijamy wytrzymałość na rozciąganie, będącą w typowych przypadkach o rząd wielkości mniejszą od wytrzymałości na ściskanie. Dla ściskania betonu i stali zakładamy sprężysto-plastyczne zachowanie, które opisane jest poniższymi zależnościami, por. rys. 1:

$$\sigma = \begin{cases} -\sigma_0 & \text{dla } -\varepsilon_0 \leq \varepsilon < -\varepsilon_0 \\ E_c \varepsilon & \text{dla } -\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq 0 \\ 0 & \text{dla } \varepsilon > 0 \end{cases}, \quad \sigma_s = \begin{cases} -f_y & \text{dla } -\varepsilon_z \leq \varepsilon_s < -\varepsilon_y \\ E_s \varepsilon_s & \text{dla } -\varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \\ f_y & \text{dla } \varepsilon_y < \varepsilon_s \leq \varepsilon_z. \end{cases} \quad (3)$$

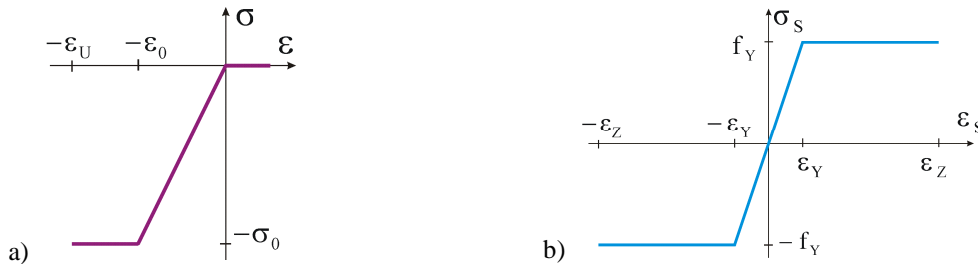
W zależności (3) ε_0 jest granicznym odkształceniem sprężystym, σ_0 jest naprężeniem uplastyczniającym. E_C jest modułem Younga dla liniowo sprężystego zachowania betonu, zaś ε_U jest granicznym odkształceniem (zmiażdżenia) przy ściskaniu. W przypadku stali ε_Y jest granicznym odkształceniem sprężystym (uplastycznienia), f_Y jest granicą plastyczności, E_S modułem Younga dla stali oraz ε_Z jest granicznym odkształceniem stali. Moduł Younga betonu i stali oraz parametry ciągliwości tych materiałów są postaci:

$$E_C = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}, \quad E_S = \frac{f_Y}{\varepsilon_Y}; \quad \lambda = \frac{\varepsilon_U}{\varepsilon_0}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon_Z}{\varepsilon_Y}. \quad (4)$$

Wygodnie jest rozpatrywać w dalszych rozważaniach parametry będące stosunkiem modułów Younga stali i betonu oraz stosunkiem wytrzymałości stali i betonu wg wzorów:

$$n = \frac{E_S}{E_C}, \quad \eta = \frac{f_Y}{\sigma_0} \quad \text{to} \quad \zeta = \frac{\varepsilon_Y}{\varepsilon_0} = \frac{\eta}{n}. \quad (5)$$

Wprowadzone bezwymiarowe parametry charakteryzujące każdy z rozpatrywanych materiałów (λ i γ), jak również parametry wiążące oba materiały (n , η i ζ) będą stosowane w dalszej części rozważań.



Rys.1. Modele jednowymiarowe: a) betonu; b) stali zbrojeniowej.

Równowaga sił i momentów działających na mały wycinek belki będącej w stanie płaskiego zginania prowadzi do następujących równań równowagi:

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx}, \quad \frac{dT(x)}{dx} + p(x) = 0, \quad (6)$$

gdzie $M(x)$ jest funkcją momentu zginającego, $T(x)$ funkcją siły poprzecznej i $p(x)$ obciążeniem. W przypadku belek statycznie wyznaczalnych równania powyższe mogą być scałkowane, a stałe całkowania wyznaczone są ze statycznych warunków brzegowych.

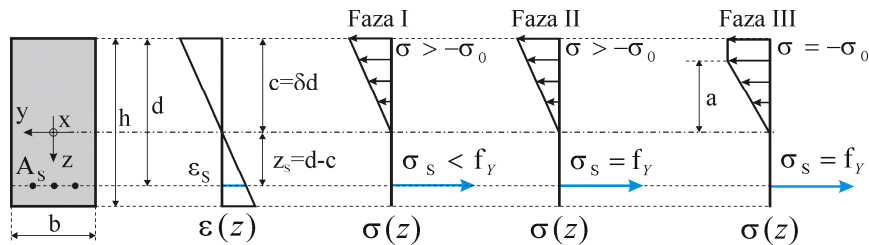
3. MOMENT ZGINAJĄCY W PRZEKROJU BELKI

Poniżej przedstawimy wyprowadzenie relacji między momentem i krzywizną zginanej belki zarówno w zakresie sprężystego, jak i sprężysto-plastycznego zachowania

materiałów. Jedna warstwa zbrojenia będzie rozpatrzona w strefie rozciągania, co jest podyktowane jedynie uproszczeniem analizy. Rozpatrzmy różne fazy czystego zginania przekroju belki w funkcji poziomu obciążenia i stosowanego stopnia zbrojenia przekroju. Podamy granice stosowalności uzyskanych zależności dla każdej z faz pracy przekroju belki. Rozpatrzmy także przypadek nieograniczonej ciągłości materiałów, prowadzący do górnego oszacowania nośności przekroju, które jest stosowane w teorii nośności granicznej i praktyce projektowej konstrukcji żelbetowych.

Faza I. Zginanie w zakresie sprężystym

W przypadku odkształceń w przekroju belki poniżej wartości ε_0 w betonie i poniżej ε_y w stali mamy sprężystą, pierwszą fazę pracy przekroju belki. Przekrój prostokątny belki oraz rozkład odkształceń i naprężeń po wysokości przekroju wraz ze stosowanymi oznaczeniami pokazane są na rysunku 2.



Rys 2. Odkształcenia i naprężenia w zbrojonym przekroju belki w różnych fazach pracy

Siła podłużna N i moment zginający M wynikające z rozkładu naprężenia, przedstawionego na rys.2, w przekroju żelbetowym definiują nośność przekroju w fazie I. Na podstawie relacji (2) i (3) i założeń do fazy I uzyskujemy:

$$N = -\frac{1}{2}bc^2E_C\kappa + A_sE_s(d-c)\kappa = 0, \quad M = \frac{1}{3}bc^3E_C\kappa + A_sE_s(d-c)^2\kappa. \quad (7)$$

Oznaczenia we wzorze (7) wyjaśnione są na rys. 2. Wprowadzamy bezwymiarowe parametry definiujące stopień zbrojenia ρ , modułowy stopień zbrojenia ξ i współczynnik strefy ściskania przekroju δ :

$$\rho = \frac{A_s}{bd}, \quad \xi = \rho \frac{E_s}{E_C} = \rho n, \quad \delta = \frac{c}{d}. \quad (8)$$

W dalszych rozważaniach wygodnie będzie używać parametru ξ będącego stopniem zbrojenia skalowanym stosunkiem modułów Younga. Rozwiązując równanie (7)₁ przy zastosowaniu oznaczeń (8), znajdziemy zasięg strefy ściskania przekroju δ , i w rezultacie z (7)₂ związek między momentem i krzywizną w fazie I pracy przekroju belki:

$$\delta_i = \sqrt{\xi(\xi+2)} - \xi, \quad M = E_C \frac{bd^3}{12} \left\{ 4\xi \left[3 + 6\xi + 2\xi^2 - 2\sqrt{\xi(\xi+2)}^3 \right] \right\} \kappa = S\kappa, \quad (9)$$

gdzie indeks I oznacza pierwszą fazę i S jest sztywnością przekroju. Zwykle zależność (9) wystarcza do oszacowania sztywności belki, która występuje w warunku stanu granicznego użytkowania. Wprowadzamy oznaczenia na krzywiznę skalującą i moment skalujący (odniesienia) o postaci:

$$\kappa_0 = \frac{2\varepsilon_0}{d} = \frac{2\sigma_0}{E_c d} \quad \text{i} \quad M_0 = \frac{bd^2}{6} \sigma_0 \quad (10)$$

takie, że $E_0 I_C = M_0 / \kappa_0$, gdzie $I_C = bd^3 / 12$. Wielkości skalujące κ_0 i M_0 oznaczają krzywiznę i moment nośności sprężystej hipotetycznego przekroju prostokątnego, o wysokości d i szerokości b , wykonanego z jednorodnego materiału liniowo sprężystego o tej samej wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie σ_0 . Stosując oznaczenia (10) w relacji (9) otrzymamy bezwymiarową zależność między momentem i krzywizną o postaci:

$$m_I = 4\xi \left[3 + 6\xi + 2\xi^2 - 2\sqrt{\xi(\xi+2)^3} \right] k = s_I k, \quad m(x) = \frac{M(x)}{M_0}, \quad k(x) = \frac{\kappa(x)}{\kappa_0}. \quad (11)$$

Z relacji (11) widać, że związek między momentem i krzywizną jest liniowy w fazie I.

Rozpatrzmy obecnie dwa możliwe przypadki przejścia dwóch materiałów w stan uplastycznienia. Pierwszy dotyczy sytuacji, gdy odkształcenia w stali osiągną wartość ε_Y , a drugi, gdy w skrajnych włóknach ścisanych betonu odkształcenia osiągają wartość $-\varepsilon_0$.

Koniec sprężystego zachowania przekroju jest osiągnięty, gdy odkształcenia w stali osiągną ε_Y , czyli naprężenia osiągną granicę plastyczności f_Y . Na tym poziomie odkształceń krzywizna realizująca ten stan może być wyznaczona stosując zależności (2) i (9), tj. $\varepsilon_Y = z_S \kappa_{IY} = (1 - \delta_{IY}) d \kappa_{IY}$ i $\delta_{IY} = \sqrt{\xi(\xi+2)} - \xi$. Oznaczenie κ_{IY} definiuje krzywiznę dla końca fazy I w chwili uplastycznienia stali. Eliminując δ_{IY} i korzystając z wcześniej wprowadzonych oznaczeń uzyskujemy:

$$k_{IY} = \frac{\kappa_{IY}}{\kappa_0} = \frac{\eta}{2n \left[1 + \xi - \sqrt{\xi(\xi+2)} \right]}, \quad m_{IY} = \frac{M_{IY}}{M_0} = \frac{\eta s_I}{2n \left[1 + \xi - \sqrt{\xi(\xi+2)} \right]}, \quad (12)$$

tj. krzywiznę i moment odpowiadający uplastycznieniu stali zbrojeniowej w przekroju.

Koniec sprężystego zachowania przekroju może być osiągnięty także wtedy, gdy odkształcenia w skrajnych włóknach ścisanych betonu osiągają granicę sprężystości $-\varepsilon_0$.

W tym przypadku mamy: $-\varepsilon_0 = -c \kappa_{I0} = -\delta_{I0} d \kappa_{I0}$ i $\delta_{I0} = \sqrt{\xi(\xi+2)} - \xi$, gdzie κ_{I0} definiuje krzywiznę dla końca fazy I w chwili uplastycznienia betonu. Eliminując δ_{I0} obliczymy krzywiznę i moment początku uplastycznienia betonu w przekroju belki,

$$k_{I0} = \frac{\kappa_{I0}}{\kappa_0} = \frac{1}{2 \left[\sqrt{\xi(\xi+2)} - \xi \right]}, \quad m_{I0} = \frac{M_{I0}}{M_0} = \frac{s_I}{2 \left[\sqrt{\xi(\xi+2)} - \xi \right]}. \quad (13)$$

W przypadku jednoczesnego osiągnięcia odkształceń w skrajnych włóknach ściskanych betonu $-\varepsilon_0$ i w stali ε_Y mamy stan jednoczesnego uplastycznienia materiałów w przekroju. Stąd wyznaczamy taki stopień zbrojenia, który rozgranicza stany pierwszego uplastycznienia stali ($\rho < \rho_{0Y}$) i betonu ($\rho > \rho_{0Y}$) w przekroju belki. Porównując rezultaty dla krzywizn (12) i (13) uzyskamy wzór na stopień jednoczesnego uplastycznienia:

$$\xi_{0Y} = \frac{n^2}{2\eta(n+\eta)} = n\rho_{0Y}. \quad (14)$$

Zasięg strefy ściskania w przekroju, krzywizna i moment dla stopnia zbrojenia (14) będą:

$$\delta_{0Y} = \frac{n}{n+\eta}, \quad k_{0Y} = \frac{n+\eta}{2n}, \quad m_{0Y} = \frac{n(2n+3\eta)}{(n+\eta)^2}. \quad (15)$$

Faza II. Zginanie przy sprężystym ściskaniu betonu i uplastycznieniu stali

W przypadku, gdy odkształcenia w stali przekraczają wartości graniczną ε_Y następuje faza II pracy przekroju. W tej fazie zakładamy także, że naprężenia ściskające w betonie są poniżej granicy plastyczności σ_0 , czyli stopień zbrojenia spełnia warunek: $\rho < \rho_{0Y}$ wg (14). Siłę podłużną i moment zginający wyznaczamy całkując rozkład naprężeń w przekroju dla fazy II, pokazany na rys. 2:

$$N = -\frac{1}{2}bc^2 E_C \kappa + A_S \sigma_Y = 0, \quad M = \frac{1}{3}bc^3 E_C \kappa + A_S \sigma_Y (d-c). \quad (16)$$

Z równania (16)₁ znajdziemy zasięg strefy ściskania dla fazy II $c_{II} = \delta_{II}d$ i z (16)₂ otrzymamy bezwymiarową zależność między momentem i krzywizną o postaci:

$$\delta_{II} = \sqrt{\frac{\psi}{k}}, \quad m_{II} = 2\psi \left(3 - \sqrt{\frac{\psi}{k}} \right), \quad \text{gdzie} \quad \psi = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_0} = \rho\eta \quad (17)$$

nazywamy wytrzymałościowym stopniem zbrojenia, czyli stopniem skalowanym stosunkiem wytrzymałości stali i betonu. Ze wzoru (17) widać, że związek między momentem i krzywizną opisany jest funkcją nieliniową. Asymptota pozioma dla relacji (17) jest określona wzorem: $m_{IIasy} = 6\psi$.

Koniec sprężystego zachowania betonu przy ściskaniu jest osiągnięty, gdy naprężenia w skrajnych włóknach ściskanych betonu osiągają granicę plastyczności $-\sigma_0$. W tym przypadku krzywizna i moment charakteryzujący początek uplastycznienia betonu są:

$$k_{II0} = \frac{\kappa_{II0}}{\kappa_0} = \frac{1}{4\psi}, \quad m_{II0} = \frac{M_{II0}}{M_0} = 2\psi(3-2\psi). \quad (18)$$

Dla odkształceń w betonie w strefie ściskania przekroju poniżej wartości granicznej $-\varepsilon_0$ następuje faza IIb pracy przekroju, której analizę pominiemy w tym artykule. W tej

fazie zakładamy także, że naprężenia rozciągające w stali są poniżej granicy plastyczności σ_Y , czyli stopień zbrojenia spełnia warunek: $\rho > \rho_{0Y}$ wg zależności (14).

Faza III. Zginanie przy sprężysto-plastycznym ściskaniu betonu i uplastycznionej stali

W przypadku odkształceń w betonie w strefie ściskania przekroju poniżej wartości granicznej $-\varepsilon_0$ i w stali odkształcenia są większe od ε_Y to następuje faza III pracy przekroju. W tej sytuacji siłę podłużną i moment zginający wyznaczamy całkując rozkład naprężeń w przekroju dla fazy III, pokazany na rys. 2:

$$N = b\sigma_0(a-c) - \frac{1}{2}bc^2E_C\kappa + A_S\sigma_Y, \quad M = \frac{1}{2}b\sigma_0(c^2 - a^2) + \frac{1}{3}bc^3E_C\kappa + A_S\sigma_Y(d-c). \quad (19)$$

Z odkształceń wg zależności (2) z wykorzystaniem (10) wyznaczmy zasięg liniowego rozkładu naprężeń w betonie dla przekroju belki a :

$$-\varepsilon_0 = -a\kappa, \quad \text{czyli} \quad a = \frac{\varepsilon_0}{\kappa} = \frac{d}{2k}. \quad (20)$$

Zatem z równania $N = 0$ obliczamy zasięg strefy ściskania: $c_{III} = \delta_{III}d$, a zależności (19) prowadzą do relacji między momentem i krzywizną w fazie III, tj.:

$$\delta_{III} = \psi + \frac{1}{4k}, \quad m_{III} = 3\psi(2-\psi) - \frac{1}{16k^2}. \quad (21)$$

Relacja (21) jest nieliniowa, zaś asymptota pozioma dana jest wzorem: $m_{IIIasy} = 3\psi(2-\psi)$.

Początek fazy III realizowany przez uplastycznienie stali, będący zarazem końcem fazy IIb zachowania przekroju, jest osiągnięty, gdy odkształcenia w stali osiągną wartość ε_Y . Stąd uzyskujemy krzywiznę i moment przy uplastycznieniu stali zbrojeniowej w przekroju:

$$k_{IIIY} = \frac{\kappa_{IIIY}}{\kappa_0} = \frac{n+2\eta}{4n(1-\psi)}, \quad m_{IIIY} = \frac{M_{IIIY}}{M_0} = 3\psi(2-\psi) - \frac{n^2(1-\psi)^2}{(n+2\eta)^2}. \quad (22)$$

Stan graniczny nośności przekroju będzie osiągnięty, gdy ciągliwość betonu przy ściskaniu będzie wyczerpana, tj. gdy odkształcenia w skrajnych włóknach ściskanych betonu osiągną wartość $-\varepsilon_U$. W tym przypadku krzywizna i moment charakteryzujący koniec fazy III przez wyczerpanie ciągliwości betonu będzie postaci:

$$k_{IIIU} = \frac{\kappa_{IIIU}}{\kappa_0} = \frac{2\lambda-1}{4\psi}, \quad m_{IIIU} = \frac{M_{IIIU}}{M_0} = 2\psi(3-2\psi) - \frac{\psi^2}{(2\lambda-1)^2}. \quad (23)$$

Koniec ciągliwości stali wystąpi, gdy $\varepsilon_S = \varepsilon_Z$, co także oznacza osiągnięcie stanu granicznego nośności przekroju. Wtedy krzywizna i moment wynoszą:

$$k_{IIIz} = \frac{\kappa_{IIIz}}{\kappa_0} = \frac{n+2\eta\gamma}{4n(1-\psi)}, \quad m_{IIIz} = \frac{M_{IIIz}}{M_0} = 3\psi(2-\psi) - \frac{n^2(1-\psi)^2}{(n+2\eta\gamma)^2}. \quad (24)$$

W przypadku jednoczesnego osiągnięcia ciągłości odkształceń w skrajnych włóknach ściskanych betonu $-\varepsilon_U$ i odkształceń uplastycznienia w stali wyznaczamy stopień zbrojenia ρ_{UZ} , przy którym stan ten wystąpi, czyli

$$\psi_{UZ} = \frac{n(2\lambda-1)}{2(\eta\gamma+n\lambda)} = \eta\rho_{UZ}, \quad \delta_{UZ} = \frac{n\lambda}{n\lambda+\eta\gamma}, \quad k_{UZ} = \frac{n\lambda+\eta\gamma}{2n}, \quad m_{UZ} = 3 - \frac{n^2+3\eta\gamma(n+\eta\gamma)}{(n\lambda+\eta\gamma)^2}, \quad (25)$$

definiując odpowiedni zasięg strefy ściskania, krzywiznę i moment dla stopnia zbrojenia.

W przypadku jednoczesnego osiągnięcia ciągłości odkształceń w skrajnych włóknach ściskanych betonu $-\varepsilon_U$ i odkształceń uplastycznienia ε_Y w stali wyznaczamy stopień zbrojenia ρ_{UY} . Stąd stopień zbrojenia, zasięg strefy ściskania, krzywizna i moment będą:

$$\psi_{UY} = \frac{n(2\lambda-1)}{2(\eta+n\lambda)} = \eta\rho_{UY}, \quad \delta_{UY} = \frac{n\lambda}{n\lambda+\eta}, \quad k_{UY} = \frac{n\lambda+\eta}{2n}, \quad m_{UY} = 3 - \frac{n^2+3\eta(n+\eta)}{(n\lambda+\eta)^2}. \quad (26)$$

W dalszej analizie zginania belek będziemy brali pod uwagę jedynie stopnie zbrojenia mniejsze od ρ_{UY} , gdyż tylko takie wartości zbrojenia dają możliwość ciągłego zniszczenia belki. Osiągnięcie nośności mocno zbrojonych belek (o stopniu zbrojenia około lub powyżej ρ_{UY}) charakteryzuje się nagłym i kruchym zniszczeniem. Pożądanym typem zniszczenia przekroju belki jest przez uplastycznienie stali, a nie przez zmiążdżenie betonu. Fakt ten znalazł odzwierciedlenie w przepisach normowych nakładający ograniczenie:

$$\delta \leq \delta_{UY}^{\max} = 0.8\delta_{UY} = 0.8 \frac{n\lambda}{n\lambda+\eta} = 0.8 \frac{\varepsilon_U}{\varepsilon_U + \varepsilon_Y}. \quad (27)$$

Charakterystycznym stopniem zbrojenia ρ_{OZ} jest przypadek jednoczesnego osiągnięcia odkształceń $-\varepsilon_0$ w skrajnych włóknach ściskanych betonu i ciągłości ε_Z w stali, czyli

$$\psi_{OZ} = \frac{n}{2(\eta\gamma+n)} = \eta\rho_{OZ} \quad \text{i} \quad \delta_{OZ} = \frac{n}{n+\eta\gamma}, \quad k_{OZ} = \frac{n+\eta\gamma}{2n}, \quad m_{OZ} = \frac{n(2n+3\eta\gamma)}{(n+\eta\gamma)^2}. \quad (28)$$

Nośność graniczna przekroju

W przypadku rozpatrywania nieograniczonej ciągłości betonu ($\lambda \rightarrow \infty$) i stali ($\gamma \rightarrow \infty$) możemy posługiwać się tzw. asymptotyczną nośnością graniczną przekroju. Relacja moment-krzywizna (21) definiuje tę wartość, gdy $k \rightarrow \infty$, czyli

$$m_{mu} = 3\psi(2-\psi) = 3 \frac{f_Y}{\sigma_0} \rho \left(2 - \frac{f_Y}{\sigma_0} \rho \right). \quad (29)$$

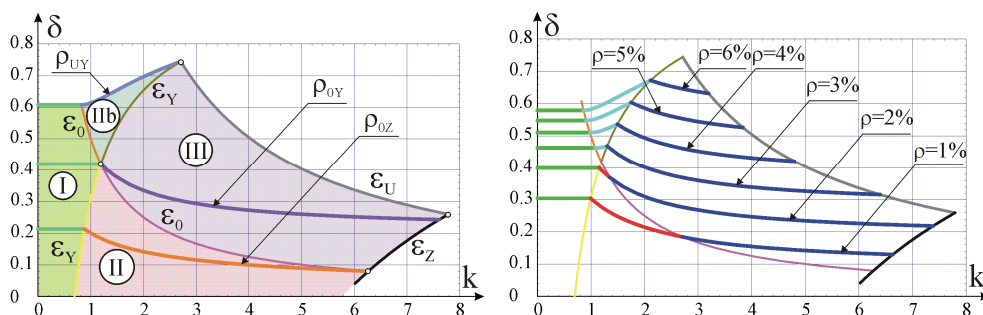
Wzór ten definiuje nośność graniczną wg terminologii teorii nośności granicznej. Z (29) można bardzo szybko oszacować nośność przekroju przy założeniu jego wymiarów, wytrzymałości obu materiałów i wartości zbrojenia. Można także obliczyć potrzebny stopień zbrojenia przy zadanym momencie od obciążeń oraz wytrzymałości betonu i stali.

Wynik (29) stosuje się w warunku stanu granicznego nośności przy projektowaniu belek żelbetowych.

4. ANALIZA WYNIKÓW I WNIOSKI

Przyjmujemy następujące dane materiałowe dotyczące betonu: $\sigma_0 = 26 \text{ MPa}$, $E_c = 30 \text{ GPa}$, $\varepsilon_U = 0.0035$. Stąd obliczamy parametry: $\varepsilon_0 = 0.00087$, $\lambda = 4.04$. Dane materiałowe dla stali zbrojeniowej są następujące: $f_y = 240 \text{ MPa}$, $E_s = 200 \text{ GPa}$, $\varepsilon_z = 0.01$. Wtedy parametry bezwymiarowe: $\varepsilon_Y = 0.0012$, $\gamma = 8.33$. Parametry wiążące własności betonu i stali wynoszą: $n = 6.67$, $\eta = 9.23$ oraz $\zeta = 1.38$. Skalowane stopnie zbrojenia będą: $\xi = n\rho = 6.67\rho$ i $\psi = \eta\rho = 9.23\rho$. Do analizy przyjęto prostokątny przekrój belki. Dla stopnia zbrojenia ρ_{0Y} wg wzorów (13) mamy: $\rho_{0Y} = 0.0227$, $\delta_{0Y} = 0.419$, $k_{0Y} = 1.19$ i $m_{0Y} = 1.08$. W przypadku stopnia zbrojenia ρ_{UY} wg wzorów (26) otrzymujemy: $\rho_{UY} = 0.0707$, $\delta_{UY} = 0.745$, $k_{UY} = 2.71$ i $m_{UY} = 2.63$. Dla stopnia zbrojenia ρ_{UZ} wg (25) obliczamy: $\rho_{UZ} = 0.0246$, $\delta_{UZ} = 0.259$, $k_{UZ} = 7.79$ i $m_{UZ} = 1.21$. Przy ρ_{OZ} wg (28) mamy: $\rho_{OZ} = 0.00432$, $\delta_{OZ} = 0.0798$, $k_{OZ} = 6.27$ i $m_{OZ} = 0.233$.

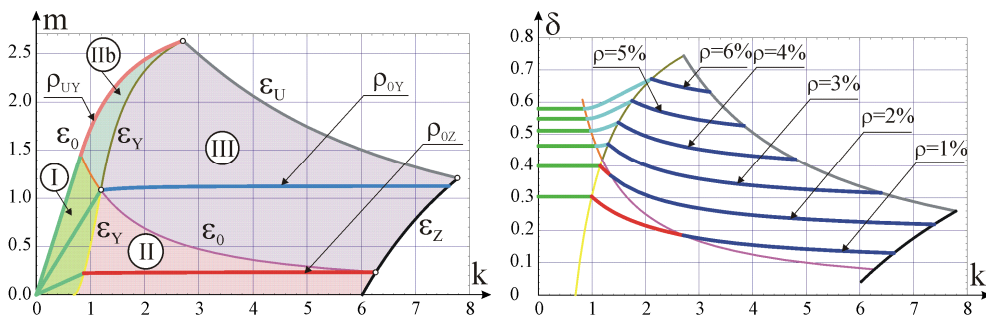
Wykorzystując powyższe dane sporządzono wykresy względnej wysokości strefy ściskania $\delta = c/d$ w funkcji skalowanej krzywizny $k = \kappa/\kappa_0$. Parametrem zmiennym na wykresach jest stopień zbrojenia przekroju ρ . Na rys. 3 wykresy $\delta(k)$ pokazano dla charakterystycznych stopni zbrojenia wynikających z przeprowadzonej analizy oraz innych wybranych stopni zbrojenia. Na rys. 3 wskazano także obszary obowiązywania rozwiązań dla rozpatrywanych faz pracy przekroju i punkty charakterystyczne.



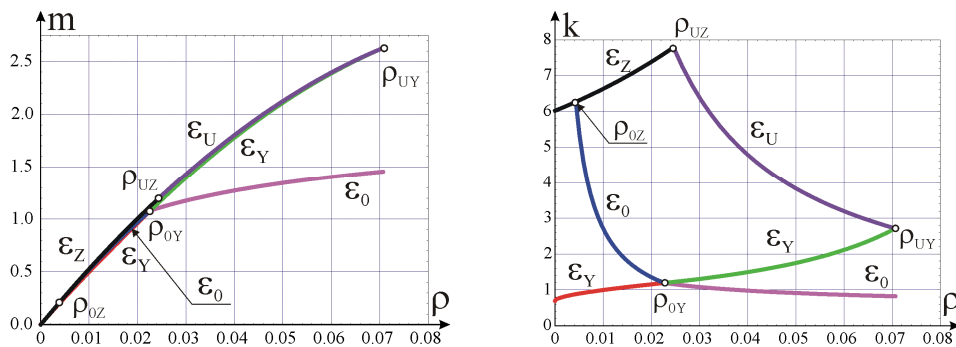
Rys. 3. Wykresy zasięgu strefy ściskania betonu w funkcji krzywizny dla różnych stopni zbrojenia z pokazaniem obszarów faz pracy przekroju

Sporządzono także wykresy momentu zginającego m w funkcji skalowanej krzywizny k . Parametrem zmiennym na wykresach jest stopień zbrojenia przekroju ρ . Na rys. 4 wykresy $m(k)$ pokazano dla charakterystycznych stopni zbrojenia, jak również wybranych stopni zbrojenia. Na rysunku tym pokazano także obszary obowiązywania rozwiązań i ich granice dla rozpatrywanych faz pracy przekroju.

Na rys. 5 pokazano wykresy charakterystycznych momentów i krzywizn w funkcji stopnia zbrojenia. W przypadku wykresów momentów większość wykresów zbliżona jest do paraboli określonej zależnością (29), czyli nośności granicznej. Wyjątkiem jest wykres $m_{T0}(\rho)$ dany zależnością (13), co oznacza, że uplastycznienie betonu przy wysokich stopniach zbrojenia jest krytycznym parametrem do osiągnięcia wysokiej nośności przekroju. W przypadku wykresów krzywizn możemy prześledzić tzw. „ciągłość przekroju”, określoną jako zdolność do osiągnięcia wysokich wartości krzywizny w fazie osiągnięcia określonych odkształceń w przekroju belki. Z wykresów widać, że stosowanie wysokich stopni zbrojenia w znacznym zakresie redukuje ciągłość w chwili osiągnięcia nośności granicznej. Z uporządkowania krzywych wynika, że dla przekrojów mocno zbrojonych krytycznymi odkształceniami są kolejno: ε_0 , ε_Y i ε_U , czyli minimum określa ciągłość betonu. Sygnalizuje to możliwość osiągnięcia nośności granicznej w wyniku zmiażdżenia betonu w krytycznym przekroju belki. Ze względu na ograniczenie (27) stopnie zbrojenia przekraczające $\rho \cong 0.05$ są niedopuszczalne w praktyce projektowej. Maksymalny zasięg ściskania dla przyjętych danych wynosi około $\delta_{UY}^{\max} \cong 0.6$.



Rys. 4. Wykresy momentu w funkcji krzywizny dla charakterystycznych stopni zbrojenia z pokazaniem obszarów faz pracy przekroju



Rys. 5. Wykresy charakterystycznych momentów i krzywizn. Punktami zaznaczono wybrane stopnie zbrojenia przy jednoczesnym osiągnięciu charakterystycznych odkształceń

5. BIBLIOGRAFIA

- [1] Chen W.F, Atsuta T.: *Theory of beam-columns, Vol.1: In-plane behavior and design*, New York, McGraw-Hill 1976.
- [2] Gawęcki A.: *Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych*, Poznań, Wyd. Polit. Poznańskiej 1998.
- [3] Szerszen M., Szwed A., Li V.C.: Flexural response of reinforced beam with high ductility concrete material, Proc. of Inter. Symp. on *Brittle Matrix Composites 8*, A.M. Brandt, V.C. Li, I.H. Marshall, eds., ZTUREK RSI and Woodhead Publishing, Warsaw, 2006, pp. 262-274.