

Piotr PRZYBYŁOWICZ<sup>1</sup>  
Wojciech FUDAŁA<sup>2</sup>

### **AKTYWNA REDUKCJA DRGAŃ WIRUJĄCEJ ŁOPATY ZA POMOCĄ ELEMENTÓW PIEZOELEKTRYCZNYCH**

*W pracy tej została przeanalizowana możliwość aktywnego tłumienia drgań w łopatach wirników. Aktywnym elementem tłumiącym jest element piezoelektryczny. Jako model łopaty wirników wybrana została belka wspornikowa. W pierwszej części pracy przedstawiono analizę wpływu obrotu na drżania belki. W drugiej części przedstawiono wyniki symulacji numerycznych przedstawiających wpływ położenia i długości elementu piezoelektrycznego na amplitudę drgań. Przedstawiono także analizę wyników.*

### **ACTIVE VIBRATION CONTROL OF ROTATING BLADE WITH PIEZOELECTRIC ELEMENTS**

*This work analyse the possibility of active damping of vibrations in rotor blades. Active damping element is a piezoelectric element. As a model rotor blade was chosen cantilever beam. The first part presents an analysis of the impact of rotation on the vibration of the beam. The second part presents the results of numerical simulations showing the impact of position and length of the piezoelectric element on vibration amplitude. In the end analysis of the results is shown.*

#### **1. WSTĘP**

W pracy tej zostanie przedstawiony problemem aktywnego tłumienia drgań w elementach wirujących takich jak łopaty wirników. Jest to problem ciągle nie w pełni przeanalizowany, a mogący poprawić właściwości użytkowe wirników.

Główne wymagania stawiane wirnikowi nośnemu według [1] to:

- prostota konstrukcji i technologii,
- mała masa, a jednocześnie duży moment bezwładności ze względu na autorotację,
- wysoka jakość aerodynamiczna,
- niski poziom hałasu oraz drgań przenoszonych na płatowiec,
- dobre właściwości aeroelastyczne,

<sup>1</sup> Politechnika Warszawska, Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych, POLSKA;  
Warszawa 02-524; Narbutta 84. Telefon: 22 6608755 E-mail: piotr.przybylowicz@ipbm.simr.pw.edu.pl

<sup>2</sup> Politechnika Warszawska, Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych, POLSKA;  
Warszawa 02-524; Narbutta 84. E-mail: wfudala@simr.pw.edu.pl

- wykluczenie kolizji łopat z innymi zespołami śmigłowca,
- odporność na warunki klimatyczne,
- mała pracochłonność obsługi i napraw,
- powtarzalność produkcyjna i niezmienność w czasie charakterystyk geometrycznych i masowych.

Dużym problemem w analizie drgań łopat wirnika jest ich nieliniowy charakter ze względu na działającą na nie siłę odśrodkową. Dlatego też stosowane są różne metody wyznaczania częstości drgań własnych i funkcji własnych.

W pracy [3] została przedstawiona nowa metoda dynamiki, która umożliwiła obliczenie częstości drgań własnych, a także funkcji własnych drgań belki wirującej.

W pracy [8] do rozwiązania równań różniczkowych opisujących ruch drgającej belki została zastosowana metoda Frobeniusa rozwiązywania równań różniczkowych. Końcowe wyniki otrzymano tworząc program komputerowy.

W pracy [5] przedstawiono kilka metod wyznaczania częstości drgań własnych i funkcji własnych drgań belki wirującej. Zastosowano między innymi metodę Rayleigh-Ritz'a, metodę elementów skończonych. Otrzymane wyniki z poszczególnych metod były do siebie zbliżone. Dodatkowo wyniki te porównano z wynikami eksperymentu i także były one do siebie zbliżone w akceptowalnych granicach.

W pracy [4] zastosowano także metodę Frobeniusa. Uwzględniono w niej różne przypadki, między innymi belki zwięzające się czy zamocowane na piaście. Otrzymane wyniki są zbliżone do wyników z innych prac.

Natomiast w pracy [9] opisano eksperyment z tłumieniem drgań belki wirującej za pomocą piezoelektryków. Wynika z nich, że dzięki aktywnemu tłumieniu drgań można zdecydowanie zmniejszyć amplitudę drgań.

## 2. MODEL UKŁADU I OPIS FIZYCZNY

W niniejszej pracy łopata wirnika została zamodelowana jako belka wspornikowa, czyli utwierdzona z jednej strony i swobodna z drugiej. Długość belki wynosi 1m, szerokość 0,05m a grubość 0,003m. Belka wykonana jest ze stali.

Obrót belki odbywa się wokół osi przechodzącej przez punkt utwierdzenia.

Równanie drgań giętnych belki wirującej, z uwzględnieniem siły odśrodkowej, można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + a_z^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{2} a_z^2 \omega^2 (x^2 - R^2) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + a_z^2 \omega^2 x \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

przy czym:

$$a_z = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (2)$$

Aby w pełni opisać model, należy wprowadzić warunki brzegowe charakteryzujący dany przypadek:

$$y(0, t) = 0 \quad \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0 \quad \left. \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=l} = 0 \quad (3)$$

Jak widać równanie drgań belki wirującej jest nieliniowe, a przez to bardzo trudne do rozwiązania. Istnieje kilka metod przybliżonych rozwiązywania tych równań.

Zgodnie z [2] można wyznaczyć wyrażenie na częstość drgań belki wirującej w zależności od prędkości obrotowej:

$$\omega_n^2 = \omega_{0n}^2 + C_n \Omega^2 \quad (4)$$

gdzie:

$$C_n = \frac{\int_0^R \left( \frac{dy_n}{dx} \right)^2 \int_x^R x m dx dx}{\int_0^R m y_n^2 dx} \quad (5)$$

Dla danego przypadku wartości współczynnika  $C_n$  mają następującą wartość:

$$C_1 = 1,167 \quad C_2 = 6,24 \quad C_3 = 21,94 \quad (6)$$

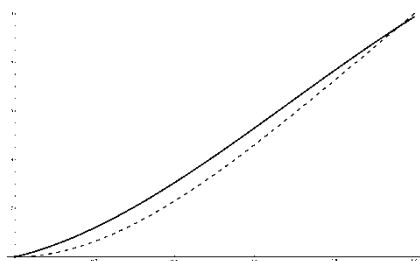
W dalszych obliczeniach będzie używana prędkość obrotowa  $\Omega = 53,82$  1/s, która odpowiada około 500 obr/min. Prędkość ta jest przeciętną prędkością obrotową głównego wirnika w śmigłowcach. Zgodnie z [4] pierwsze trzy funkcje własne mają postać:

$$\begin{aligned} U_{o1}(x) &= 0,391x + 1,158x^2 - 0,562x^3 \\ U_{o2}(x) &= -0,5x - 4,542x^2 + 8,125x^3 - 2,083x^4 \\ U_{o3}(x) &= -0,718x + 24,931x^2 - 76,447x^3 + 70,992x^4 \\ &\quad - 17,757x^5 \end{aligned} \quad (7)$$

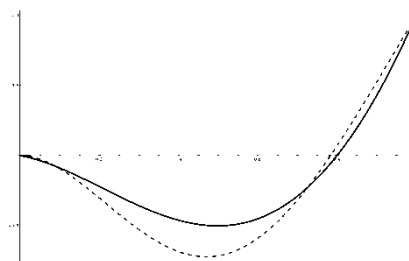
Odpowiadające im częstości własne mają wartość:

$$\omega_{o1} = 62,13\text{Hz} \quad \omega_{o2} = 166,85\text{Hz} \quad \omega_{o3} = 374,28\text{Hz} \quad (8)$$

Poniższe wykresy przedstawiają dwie pierwsze funkcje własne belki wirującej, zaznaczone linią ciągłą, w porównaniu do funkcji własnych belki niewirującej, zaznaczone linią przerywaną.

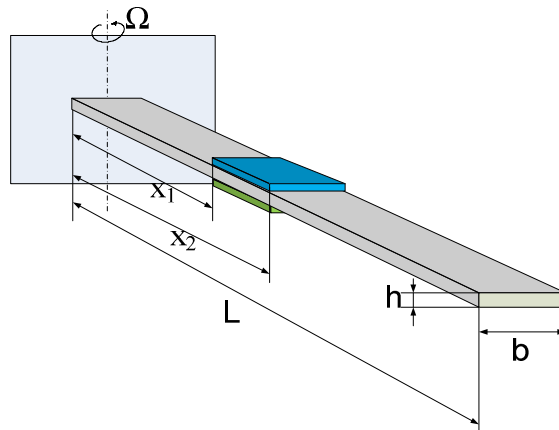


Wyk. 1. Pierwsza funkcja własna belki wirującej



Wyk. 2. Druga funkcja własna belki wirującej

### 3. MODEL ŁOPATY Z TŁUMIENIEM AKTYWNYM ZA POMOCĄ ELEMENTÓW PIEZOELEKTRYCZNYCH



Rys. 1. Belka wirująca z aktuatorem, na górze belki, i sensorem na spodzie belki

Na początku należy zamodelować układ aktywnego tłumienia. Układ pokazany jest na rys. 1, gdzie na górze belki jest element piezoelektryczny – aktuator. Podstawowe prawo elementów piezoelektrycznych mówi, że przyłożenie napięcia powoduje powstanie naprężenia w tym elemencie, które to można zapisać jako:

$$\epsilon_p = V_a \cdot \frac{d_{31}}{h_2} \quad (9)$$

gdzie:

$d_{31}$  – stała piezoelektryka,  $h_2$  – grubość elementu piezoelektrycznego.

Przy powyższym założono, że stała piezoelektryka ani jego grubość są niezmiennie na całej jego długości. Przyjęto także taki kierunek elementu piezoelektrycznego, że dodatnie napięcie powoduje dodatnie naprężenie.

Gdy element piezoelektryczny jest trwale przytwierdzony do belki powstanie w nim dodatniego naprężenia powoduje naprężenie w belce o tej samej wartości z przeciwnym znakiem.

Naprężenie to ma dwa efekty. Pierwszym z nich jest naprężenie wzdłużne, które wynika z równania sił zrzutowanych na oś X. Ma ono wartość:

$$\epsilon_l(x, t) = \frac{E_2 h_2}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \cdot \epsilon_p(x, t) \quad (10)$$

gdzie:

$E_1$  – moduł Younga dla belki,  $E_2$  – moduł Younga dla elementu piezoelektrycznego,  $h_1$  – grubość belki,  $h_2$  – grubość elementu piezoelektrycznego

Drugim efektem jest moment powodowany siłą działającą równoległe do osi neutralnej. Ma on postać:

$$T(x, t) = E_1 h_1 b \epsilon_l \left( \frac{h_1}{2} - D \right) + E_2 h_2 b (\epsilon_l - \epsilon_p) \left( \frac{h_2}{2} + h_1 - D \right) \quad (11)$$

gdzie:

b – szerokość belki i aktuatora, przy założeniu tej samej szerokości  
D – wysokość położenia osi neutralnej, równa:

$$D = \frac{E_1 h_1^2 + E_2 h_2^2 + 2 h_1 h_2 E_2}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \quad (12)$$

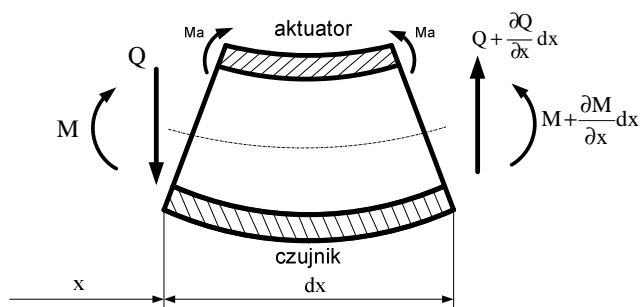
Podstawiając powyższy wzór do równania (11) otrzymujemy:

$$M_b(x, t) = \frac{E_1 h_1 E_2 b}{E_1 h_1 + E_2 h_2} \left( \frac{h_1 + h_2}{2} \right) d_{31} \cdot U(x, t) = c \cdot U(x, t) \quad (13)$$

gdzie:

c- jest stałą zależną od materiału i kształtu belki

Następnie zakładając idealne połączenie między piezoelektrykiem i belką, działanie aktuatora może być zredukowane do momentu działającego wzdłuż belki, na długości piezoelektryka wyrażonego wzorem (13).



Rys 2. Elementarny odcinek belki

Równanie ruchu belki zgodnie z [6] i [7] będzie miało postać:

$$a \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M_A}{\partial x^2} = q_0(t) \quad (14)$$

gdzie:

$a = \frac{EJ}{\rho A}$ ,  $\mu$  – wartość tłumienia wewnętrznego materiału,  $M_A$  – moment pochodzący od piezoelektryka,  $q_0(t)$  – siła wymuszająca zmienna w czasie

Po uwzględnieniu, że moment  $M_A$  działa tylko na długości elementu piezoelektrycznego, otrzymujemy:

$$a \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_p \frac{\partial^2 w(x_s)}{\partial x^2} [\delta'(x - x_1) - \delta'(x - x_2)] = q_0(t) \quad (15)$$

Szukamy rozwiązania w postaci:

$$w = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) U_i(x) \quad (16)$$

$$q_0(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) U_i(x)$$

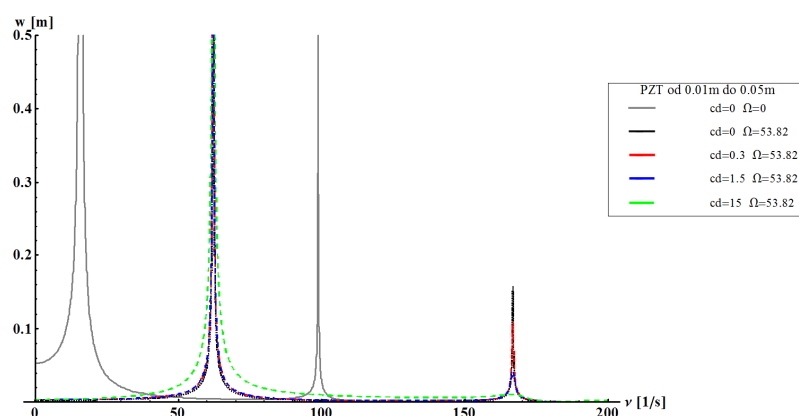
gdzie:

$U_i$  – funkcje własne belki wirującej

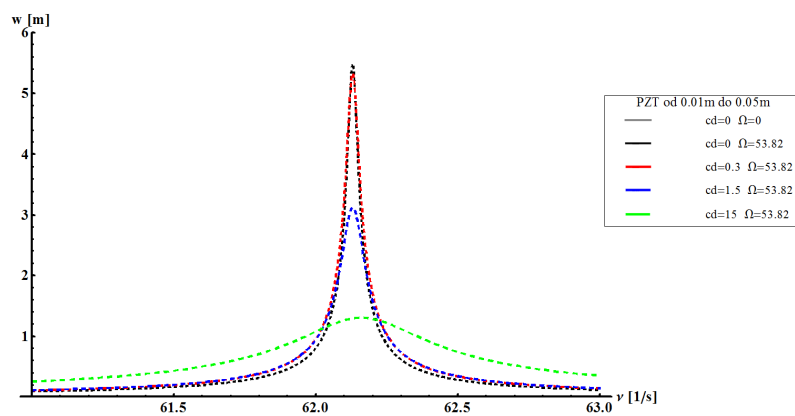
Z powyższych równań łatwo można wyprowadzić równanie drgań giętych belki z elementem piezoelektrycznym z jednoczesnym sterowaniem proporcjonalnym i prędkościowym będzie miało postać:

$$\ddot{\xi}_i(t) + a(\xi_i(t)k^4 + \mu\dot{\xi}_i(t)k^4) + \frac{[-U_j'(x_1) + U_j'(x_2)]}{\int_0^l U_j^2(x)} \left[ c_D \sum_{i=1}^n \dot{\xi}_i(t) U_i''(x_s) + c_p \sum_{i=1}^n \xi_i(t) U_i''(x_s) \right] = q_i(t) \quad (25)$$

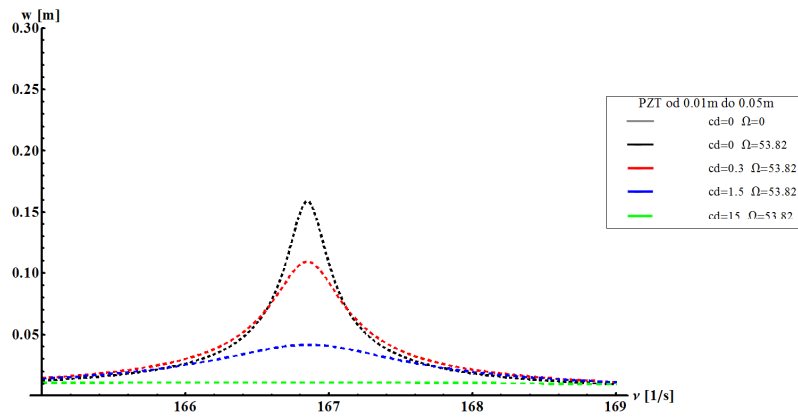
## 4. WYNIKI SYMULACJI NUMERYCZNYCH



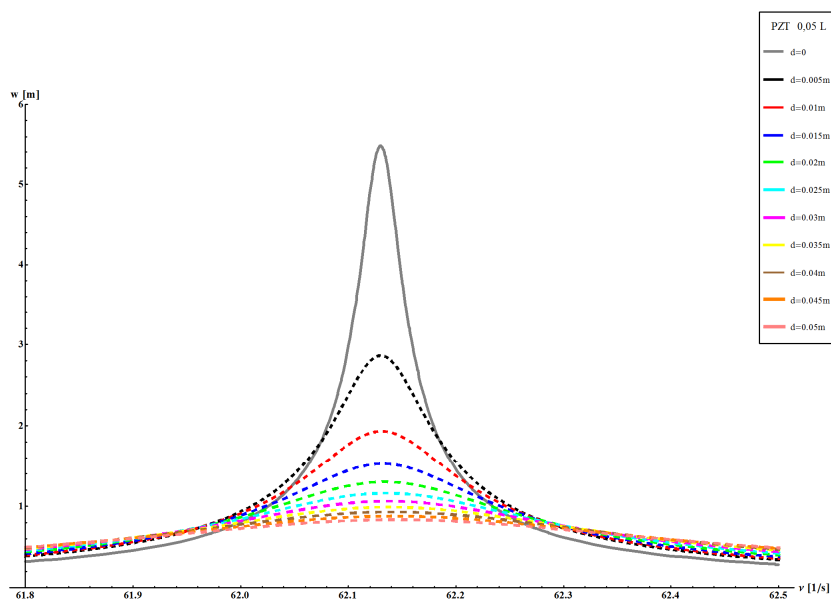
Rys. 3. Wykres amplitudowo częstotliwościowy trzech pierwszych wartości rezonansu, sterowanie prędkościowe, początek elementu piezoelektrycznego 0,01L



Rys. 4. Wykres amplitudowo częstotliwościowy dla pierwszej wartości rezonansu, sterowanie prędkościowe, początek elementu piezoelektrycznego 0,01L



Rys. 5. Wykres amplitudowo częstotliwościowy dla drugiej wartości rezonansu, sterowanie prędkościowe, początek elementu piezoelektrycznego  $0,01L$



Rys. 6. Wykres amplitudowo częstotliwościowy dla pierwszej wartości rezonansu, sterowanie prędkościowe, dla różnej długości elementu piezoelektrycznego



## 5. WNIOSKI

Z symulacji i wcześniejszych rozważań widać że przy ruchu wirowania siła odśrodkowa powoduje efekt usztywnienia belki, z czego wynika zwiększenie częstotliwości dla których występuje rezonans. Dzięki temu już tylko przy zastosowaniu metody sterowania zależnej od prędkości odkształcenia, można osiągnąć bardzo dobre rezultaty tłumienia drgań w belce wirującej.

Ostatni wykres prezentuje zależność między długością elementu piezoelektrycznego a amplitudą. Jak widać przy wzroście długości elementu piezoelektrycznego możliwości tłumienia nie rosną liniowo. W pewnym momencie zysk uzyskany ze wzrostu możliwości tłumienia jest tak niewielki, że nie będzie opłacalne stosowanie dłuższych elementów ze względu na ich cenę.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Praca zbiorowa pod redakcją Kazimierza Szabelskiego, Bohdana Jancelewicza, Wiesława Łucjanka, Wstęp do konstrukcji śmigłowców, 2002, WKŁ, Warszawa
- [2] Jerzy Lipka, Częstość drgań własnych wirujących łopat wirników nośnych śmigłowca, 1956, Archiwum Budowy Maszyn
- [3] H. H. Yoo, S. H. Shin, Vibration analysis of rotating cantilever beams, 1998, Journal of Sound and Vibration
- [4] A. D. Wright, C. E. Smith, R. W. Thresher, J. L. C. Wang, Vibration modes of centrifugally Stiffened Beams, 1982, Journal of Applied Mechanics
- [5] J. W. Jaworski, E. H. Dowell, Free vibration of a cantilevered beam with multiple steps: Comparison of several theoretical methods with experiment, 2008, Journal of sound and vibration
- [6] Edward F. Crawley, Javier de Luis, Use of piezoelectric actuators as element of intelligent structure, 1987, Aiaa Journal
- [7] T. Bailey, J. E. Hubbard, Distibuted piezoelectric-polymer active vibration control of a cantilever beam, 1985, Journal of Guidance, Control and Dynamics, 8
- [8] V. Giurgiutiu, R. O. Stafford, Semi-analytic methods for frequencies and mode shapes of rotor blades, 1977, Vertica
- [9] S. B. Choi, M. S. Han, Vibration control of a rotating cantileverd beam using piezoactuators: experimental work, 2003, Journal of Sound and vibration
- [10] W. Fudała, Praca magisterska, 2010, Politechnika Warszawska