

SZCZEŚNIAK Wacław¹
ATAMAN Magdalena¹

WYBRANE ZADANIA Z DYNAMIKI UKŁADU DWÓCH SZTYWNYCH KUL

W referacie przedstawiono rozwiązania wybranych trudniejszych zadań dotyczących dynamiki dwóch sztywnych kul. Te nietypowe zadania są sformułowane, bez podania rozwiązań, w starych, niedostępnych pozycjach literatury [1-4] i były przedmiotem egzaminów na uniwersytetach angielskich w końcu XIX wieku.

SELECTED PROBLEMS OF DYNAMICS OF TWO RIGID SPHERES

In the paper solutions of selected problems of dynamics of two rigid spheres are presented. Formulation of these examination problems, date the end of the nineteenth century, one can find in the old books [1-4].

1. WSTĘP

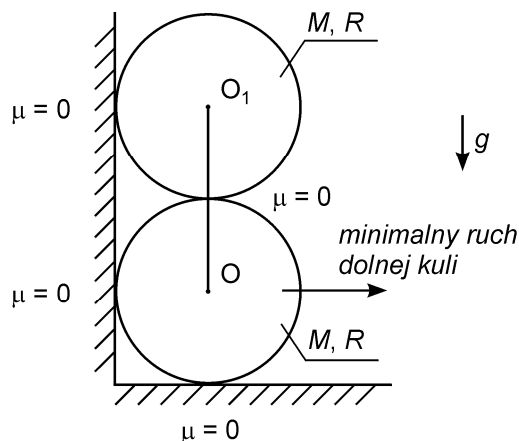
Zadania z dynamiki analitycznej w odniesieniu do dynamiki układu dwóch sztywnych kul sprawiają wiele kłopotów przy ich rozwiązaniu. Zadania takie, bez rozwiązań, zawarte są w bardzo starych, trudnodostępnych pozycjach literatury [1-4]. Były one przedmiotem aktów egzaminacyjnych z końca XIX wieku na uniwersytetach angielskich. Z uwagi na ograniczoną objętość referatu w opracowaniu podamy pełne rozwiązanie dwóch zadań. Inne, podobne zadania można rozwiązać wykorzystując idee zawarte w tych przykładach.

2. DWIE GŁADKIE KULE PRZY GŁADKIEJ PIONOWEJ ŚCIANIE I GŁADKIEJ POZIOMEJ PODŁODZE

Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 1 rozważamy dwie gładkie, jednakowe kule, każda o masie M i promieniu R . Kule spoczywają jedna na drugiej. Zakładamy, że między kulami oraz pomiędzy kulami a pionową ścianą i poziomą podłogą nie ma sił tarcia. Pomijalnie mały, poziomy impuls siły, przyłożony do dolnej kuli wyprowadza obie kule z niestatecznego położenia równowagi, powodując ich ruch pod wpływem sił grawitacji. Celem rozwiązania jest wyznaczenie chwilowej prędkości dolnej kuli w momencie jej

¹ Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16,
tel.: +48 22 234 65 07, e-mail: w.szczesniak@il.pw.edu.pl;
tel.: +48 22 234 64 70, e-mail: m.ataman@il.pw.edu.pl;

oderwania się od górnej kuli. Kule są w ruchu postępowym a odcinek $O_1O = 2R$, łączący ich środki, jest w ruchu płaskim.



Rys. 1. Schemat dynamiczny rozwiązywanego zadania

Przyjmując oznaczenia jak na rysunku 2, w pierwszej kolejności rozwiązujemy zadanie pomocnicze, jakim jest ruch jednej kuli po drugiej, nieruchomej. Warunek oderwania kuli ruchomej w ruchu postępowym, od nieruchomej, przy wykorzystaniu równania bilansu energii przy prędkości środka ruchomej kuli \tilde{v} , zapisujemy w następujący sposób:

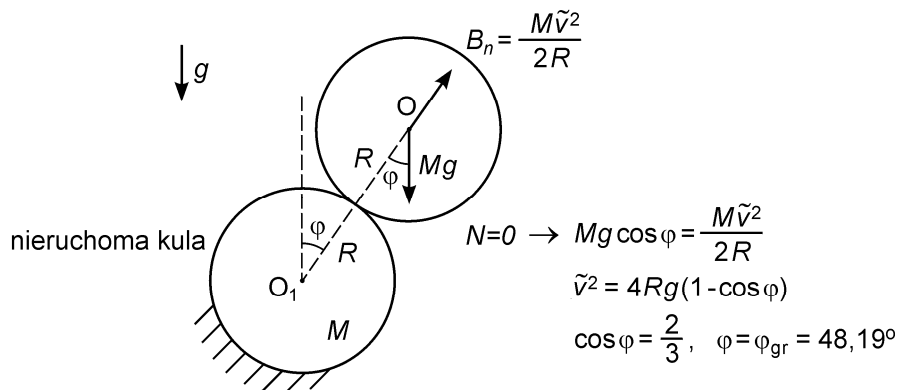
$$N = 0, \quad Mg \cos \varphi = M \frac{\tilde{v}^2}{R+R}, \quad 2Mg(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2}M \tilde{v}^2 \rightarrow$$

$$\tilde{v}^2 = 4Rg(1 - \cos \varphi) \rightarrow \cos \varphi = \frac{2}{3}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad (1)$$

$$\varphi = \varphi_{gr} = 48.19^\circ.$$

W przypadku dwóch gładkich jednakowych krążków lub dwóch gładkich jednakowych obręczy kąt graniczny φ , jak łatwo zauważyć, będzie taki sam. Przechodząc teraz do zasadniczego rozwiązania zadania zauważymy, że prędkość \tilde{v} zgodnie z rysunkiem 2, nie może być prędkością poszukiwaną, ponieważ została ona wyznaczona w ruchu względnym kuli. W rzeczywistości kula górna nie jest nieruchoma, bowiem przemieszcza się w dół z prędkością pionową v_1 , zaś dolna z poziomą niewiadomą prędkością v . Odcinek $O_1O = 2R$ łączący środki kul jest w ruchu płaskim z chwilowym środkiem obrotu S . Prędkości v i v_1 są ze sobą związane zależnością wynikającą z własności chwilowego środka obrotu, bądź zrzutowane na stały odcinek O_1O , muszą być równe. Mamy zatem:

$$\frac{v_1}{2R \sin \varphi} = \frac{v}{2R \cos \varphi}, \quad v_1 \cos \varphi = v \sin \varphi, \quad v_1 = v \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}v, \quad v_1 = \frac{5}{4}v^2. \quad (2)$$

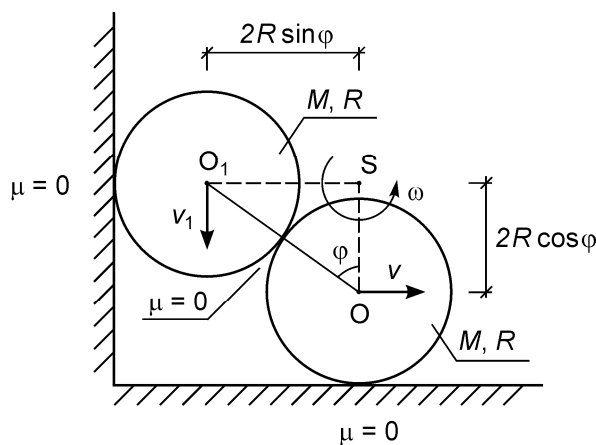


Rys. 2. Bilans energii i warunek oderwania się dolnej kuli od górnej przy założeniu nieruchomej górnej kuli

Ostateczną prędkość poziomą dolnej kuli v w chwili oddzielenia się jej od kuli górnej wyznaczmy równania wynikającego z prawa zachowania energii w rozważanym układzie w następujący sposób:

$$\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} M v_1^2 = M g R \cos \varphi, \quad v^2 = (1 + tg^2 \varphi) = \frac{4}{3} gR \rightarrow \quad (3)$$

$$\rightarrow v^2 \left(1 + \frac{5}{4}\right) = \frac{4}{3} gR, \quad v^2 = \frac{16}{3 \times 9} gR, \quad v = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{gR}{3}}.$$



Rys. 3. Układ prędkości działających na kule w momencie oddzielenia

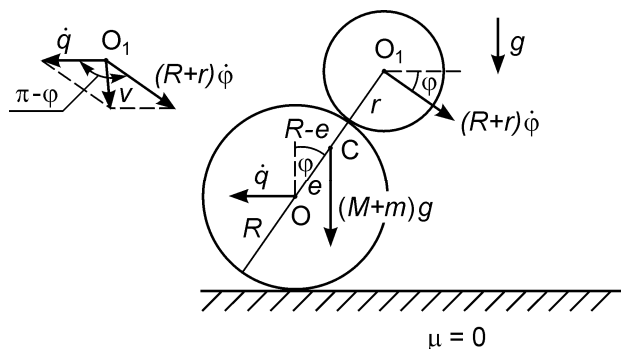
Prędkość górnej kuli v_1 w momencie oderwania się kuli dolnej obliczamy korzystając ze wzoru (2), skąd otrzymujemy

$$v_1 = v \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{5Rg}{3}}, \quad \tilde{v} = \sqrt{\frac{4Rg}{3}}. \quad (4)$$

3. DWIE GŁADKIE KULE PRZY GŁADKIEJ POZIOMEJ PODŁODZE

Następnie rozważymy idealnie gładką kulę o masie m i promieniu R , spoczywającą na gładkiej, sztywnej, poziomej podłodze w warunkach ziemskich. Na jej szczycie położono drugą kulę o masie m i promieniu r , jak na rysunku 4. W pewnej chwili pomijalnie mały, poziomy impuls siły spowodował ruch mniejszej kuli m po dużej kuli M (rysunek 4). Naszym celem będzie wyznaczenie kąta granicznego φ , przy którym mała kula oderwie się od powierzchni dużej kuli. W wyniku ruchu małej kuli m , kula duża M przemieszcza się w lewo ruchem postępowym z prędkością \dot{q} . Mniejsza kula jest w ruchu złożonym i doznaje dwóch prędkości \dot{q} oraz $(R+r)\dot{\varphi}$, jak na rysunku 4. W rozważanym układzie nie ma ruchu obrotowego. Położenie środka masy układu C wyznaczmy z równania:

$$M e = m(R+r-e) \quad \Leftrightarrow \quad e = \frac{m}{m+M}(R+r). \quad (5)$$



Rys. 4. Układ prędkości działających na obie kule przy wychyleniu mniejszej z nich o kąt φ

Jedyną siłą działającą w środku masy (ciężkości) C układu jest ciężar własny $(M+m)g$, zatem suma składowych poziomych pędów wynosi zero

$$(M+m)\dot{q} - m(R+r)\dot{\varphi} \cos \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{q} = \frac{m}{m+M}(R+r)\dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (6)$$

Równanie (6)₂ łączy prędkość środka dużej kuli \dot{q} z prędkością środka małej kuli $(R+r)\dot{\varphi}$, jak pokazano to na rysunku 4. Kwadrat pozornej prędkości kątowej $\dot{\varphi}^2$ wyznaczmy z równania bilansu energii kinetycznej i potencjalnej rozważanego układu. Mamy zatem:

$$E_k = \frac{1}{2} M \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m \left\{ \dot{q}^2 + [(R+r)\dot{\varphi}]^2 + 2\dot{q}(R+r)\dot{\varphi} \cos(\pi - \varphi) \right\}. \quad (7)$$

Uwzględniając w ostatnim (6)₂, po redukcji, przekształceniach i uporządkowaniu, energia kinetyczna układu wynosi:

$$E_k = \frac{1}{2} m (R+r)^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{M+m} \right) (R+r)^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi. \quad (8)$$

Energia potencjalna układu jest następująca:

$$V = E_p = mg(R+r)(1 - \cos \varphi). \quad (9)$$

Porównując ze sobą obie energie (8) i (9), otrzymujemy po prostych uproszczeniach:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2(M+m)g(1 - \cos \varphi)}{(R+r)[M+m(1 - \cos^2 \varphi)]}. \quad (10)$$

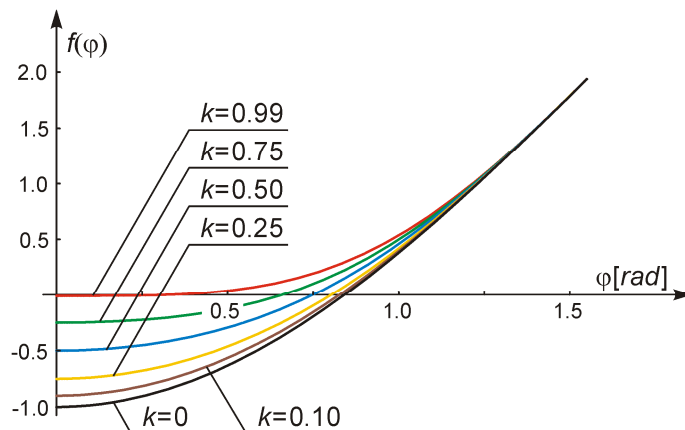
Warunek odrywania się małej kuli od dużej prowadzi do równania sumy rzutów sił na kierunek siły odśrodkowej, w którym nacisk małej kuli na dużą $N = 0$. Mamy zatem:

$$\frac{m}{M+m} \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi + 2 = 0. \quad (11)$$

Aby więc mała kula m oderwała się od dużej kuli M , musi być spełnione równanie (11).

Pierwiastki rzeczywiste tego równania mają sens przy $\frac{m}{M+m} \leq 1$. I tak, jeśli

$k = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.99$, to kąty graniczne mają następujące wartości: $\varphi_{gr} = 47.39^\circ, 46.00^\circ, 42.94^\circ, 37.82^\circ, 18.85^\circ$. Jak łatwo zauważyć kąty graniczne maleją przy wzroście masy małej kuli m . Dodatkowo zwróćmy uwagę, że w przypadku małego krążka m i małej obryczy m idealnie gładkich rozwiązanie zadania jest takie samo. Numeryczne rozwiązanie równania (11) pokazano na rysunku 5.



Rys. 5. Graficzne rozwiązanie równania (11)

4. WNIOSKI

W referacie podano szczegółowe rozwiązanie zagadnienia dwóch doskonale gładkich kul spoczywających jedna na drugiej w przypadku zaburzenia małym impulsem sił ich niestatecznego położenia równowagi. Wyznaczono kąty oderwania się jednej kuli od drugiej oraz prędkości występujące w momencie oderwania. Inne zadania z tego zakresu można znaleźć w pozycjach literatury [5-9].

5. BIBLIOGRAFIA

- [1] Love A.E.H.: *Theoretical Mechanics an Introductory Treatise on the Principles of Dynamics with Applications and Numerous Examples*. Cambridge at the University Press, London 1921.
- [2] Routh E.J.: *The Elementary Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. Being Part I of a Treatise on the Whole Subject. With Numerous Examples* Macmillan and CO., Limited New York: The Macmillan Company, 1905.
- [3] Smart E.H.: *Advanced Dynamics, Vol. I and Vol. II*. Macmillan and CO., Limited London 1951.
- [4] Straszewicz Z.: *Nauka o ruchu*. Skład Główny Księgarni Gebethnera i Wolfa, Warszawa 1916.
- [5] Szcześniak W.: *Dynamika analityczna i <<MATHEMATICA>> w zadaniach i przykładach obliczeniowych*. OWPW, Warszawa 2010.
- [6] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych*. OWPW, Warszawa 2007.
- [7] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna w zadaniach dla dociekliwych*. OWPW, Warszawa 2010.
- [8] Routh E.J.: *The Elementary Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. Being Part II of a Treatise on the Whole Subject. With Numerous Examples* Macmillan and CO., Limited New York: The Macmillan Company, 1905.
- [9] Straszewicz Z.: *Zbiór zadań z mechaniki*. TBSPW, Warszawa 1921/1922.