

*konstrukcja prętowa, metoda elementów skończonych, stateczność statyczna początkowa i zlinearyzowana, stateczność dynamiczna pod obciążeniem harmonicznym, metoda bilansu harmonicznym*

Sławomir STACHURA<sup>1</sup>

### ANALIZA STATECZNOŚCI KOPUŁY PRĘTOWEJ

*Wyznaczenie statycznej siły krytycznej, zależności obciążenie przemieszczenie oraz głównego niestatecznego obszaru rezonansowego dla najmniejszej wartości własnej, umożliwia ilościową i jakościową ocenę wrażliwości konstrukcji. Do analizy stateczności zastosowano metodę elementów skończonych, która to umożliwia analizę stateczności, w funkcji wszystkich istotnych parametrów fizycznych, dla złożonych układów prętowych. Obszary stateczne i niestateczne głównych rezonansów dla najmniejszych wartości własnych wyznaczono w funkcji parametrów:  $\alpha P^s$ ,  $\beta P^z$ ,  $\theta_n$ .*

### STABILITY ANALYSIS OF LATTICE DOME

*Determining the main unstable areas of resonance at the lowest eigenvalues makes it possible to assess a structure as far as quantitative and qualitative aspects of dynamic stability are concerned. The areas were determined using the method of harmonic balance which is a very effective means of assessment when analyzing combined lattice girders. The method of finite elements allows to determine stable and unstable areas of resonance as a function of all essential physical parameters of combined lattice girders. The stable and unstable areas of main resonances at the lowest eigenvalues were determined as a function of parameters  $\alpha P^s$ ,  $\beta P^z$ ,  $\theta_n$ .*

## 1. WSTĘP

Stateczność jest odpornością układu na zaburzenia, to znaczy zachowania ruchu /lub położenia równowagi/ przy działaniu małych zaburzeń. Jeżeli rozważany ruch /lub równowaga/ doznaje znaczących zmian nawet pod wpływem małych zaburzeń, to nazywamy go niestatecznym ruchem /niestateczną równowagą/.

Inaczej mówiąc, gdy zaburzenia wywołują ruch oddalający system od stanu równowagi lub drgania wokół stanu równowagi zachodzą ze zwiększającą się amplitudą, to stan równowagi jest niestateczny. Odwrotnie, jeżeli układ wraca do stanu początkowego lub oscyluje wokół niego ze stałą lub malejącą amplitudą, to równowaga jest stateczna. Jeśli

---

<sup>1</sup> Politechnika Radomska, Wydział Mechaniczny; 26-600 Radom, ul. Krasickiego 54

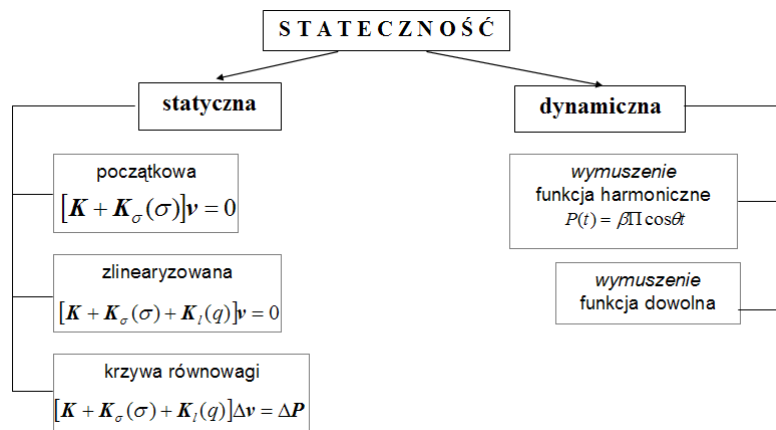
zaburzenia początkowe wyrazić w przemieszczeniach, to w przypadku, gdy przemieszczenia układu są tego samego rzędu, co zaburzenia, to równowaga jest stateczna.

Jeżeli przyłożone do układu okresowe obciążenie dynamiczne powoduje utratę stateczności układu, to zachodzi zjawisko rezonansu parametrycznego, który utożsamiamy ze zjawiskiem dynamicznej utraty stateczności. Utrata stateczności następuje wówczas przez flutter, to znaczy - nieograniczone narastanie amplitudy drgań.

Zjawisko to występuje przy różnych wartościach sił obciążających, niekoniecznie wyższych od statycznych sił krytycznych. Wynika stąd potrzeba wykonania analiz stateczności dynamicznej konstrukcji, która polega na wyznaczeniu granic obszarów rezonansów parametrycznych w funkcji wartości i częstości obciążenia.

Problemy stateczności statycznej powłok prętowych można znaleźć między innymi w pracach [2, 6, 7], natomiast stateczności dynamicznej w pracach [1, 3].

W pracy wykonano analizę stateczności statycznej i dynamicznej przy wymuszeniu okresowym dla przestrzennej kopuły prętowej. Wyniki przedstawiono w postaci sił krytycznych oraz głównego obszaru rezonansowego dla najniższej częstości.

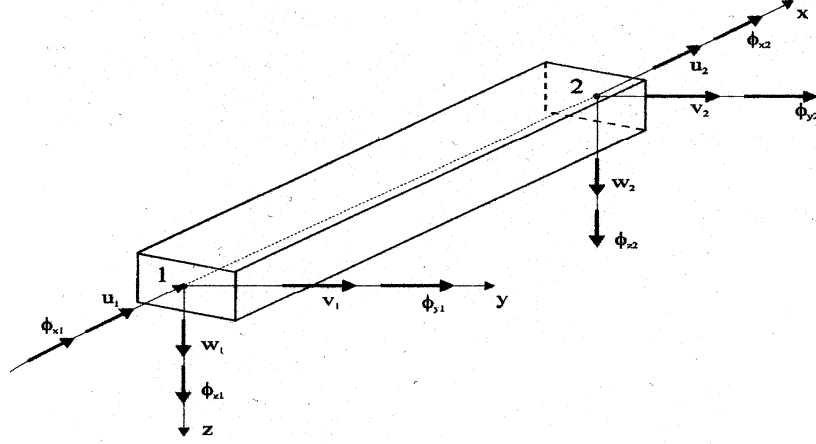


Rys.1.1. Ilustracja podziału problemu stateczności w pracy

## 2. RÓWNANIA RÓWNOWAGI

Do sformułowania równań równowagi kopuły prętowej zastosowano metodę elementów skończonych, użyto dwuwzłowego elementu prętowego (rys.2.1), przyjmując w węzłach po 6 stopni swobody; wektor uogólnionych przemieszczeń węzłowych jest postaci

$$\mathbf{q}^T = [u_1, v_1, w_1, \phi_{x1}, \phi_{y1}, \phi_{z1}, u_2, v_2, w_2, \phi_{x2}, \phi_{y2}, \phi_{z2}] \quad (2.1)$$



Rys.2.1. Element prętowy

natomiast, wektor przemieszczeń  $u$  elementu zapisano funkcją

$$u = [N_1^u, N_2^u, N_3^u, 0, N_5^u, N_6^u, N_7^u, N_8^u, N_9^u, 0, N_{11}^u, N_{12}^u] \mathbf{q} = [N]_u \mathbf{q} \quad (2.2)$$

gdzie:  $N_1^u = 1 - \xi$ ,  $N_2^u = 6(\xi - \xi^2)\eta$ ,  $N_3^u = 6(\xi - \xi^2)\zeta$ ,  $N_5^u = (1 - 4\xi + 3\xi^2)L\zeta$ ,  
 $N_6^u = (-1 + 4\zeta + 3\zeta^2)L\eta$ ,  $N_7^u = \xi$ ,  $N_8^u = 6(-\xi + \xi^2)\eta$ ,  $N_9^u = 6(\xi - \xi^2)\zeta$ ,  
 $N_{11}^u = (-2\xi + 3\xi^2)L\zeta$ ,  $N_{12}^u = (2 - 3\xi^2)L\eta$ , oraz:  $\xi = \frac{x}{L}$ ,  $\zeta = \frac{y}{L}$ ,  $\eta = \frac{z}{L}$

są funkcjami kształtu, opisującymi przemieszczenie wzdłużne dowolnego punktu belki w funkcji przemieszczeń węzłowych wzdłużnych i poprzecznych oraz kątów ugięć.

Pole przemieszczeń poprzecznych punktów leżących na osi obojętnej elementu belkowego przyjęto w postaci

$$v = [0, N_2, 0, 0, 0, N_6, 0, N_8, 0, 0, 0, N_{12}] \mathbf{q} = [N]_v \mathbf{q} \quad (2.3a)$$

$$w = [0, 0, N_3, 0, N_5, 0, 0, 0, N_9, 0, N_{11}, 0] \mathbf{q} = [N]_w \mathbf{q} \quad (2.3b)$$

gdzie:  $N_2 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$ ,  $N_3 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$ ,  $N_5 = (-\xi + 2\xi^2 - 3\xi^3)L$ ,  
 $N_6 = (\xi - 2\xi^2 + 3\xi^3)L$ ,  $N_8 = 3\xi^2 - 2\xi^3$ ,  $N_9 = 3\xi^2 - 2\xi^3$ ,  $N_{11} = (\xi^2 - \xi^3)$ ,  
 $N_{12} = (-\xi^2 + \xi^3)$

są funkcjami kształtu opisującymi przemieszczenie poprzeczne w funkcji przemieszczeń węzłowych poprzecznych oraz kątów ugięć.

Funkcja kształtu kątów skręcenia przekrojów poprzecznych dana jest w postaci

$$\varphi = [0, 0, 0, N_4^s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, N_{10}^s, 0, 0] \mathbf{q} = [N]_s \mathbf{q} \quad (2.4)$$

gdzie:  $N_4^s = 1 - \xi$ ,  $N_{10}^s = \xi$

Całkowite odkształcenie dowolnego włókna składa się z odkształcenia liniowego  $\varepsilon_l$  oraz nieliniowego  $\varepsilon_n$ , a więc  $\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_n$

$$\begin{aligned}\varepsilon_l^T &= \{\varepsilon_x^l, \gamma_{xy}^l, \gamma_{xz}^l\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\}, \\ \varepsilon_n^T &= \{\varepsilon_x^n, 0, 0\} = \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], 0, 0 \right\}\end{aligned}\quad (2.5)$$

w wyrażeniu na część nieliniową odkształcenia podłużnego  $\varepsilon_x^n$  pomija się kwadrat pochodnej składowej przemieszczenia  $u$  względem współrzędnej  $x$ . W zapisie macierzowym liniowa część odkształcenia (2.5) ma postać

$$\varepsilon_l = \mathbf{L}_1 \mathbf{u} = \mathbf{L}_1 \mathbf{H}_z \mathbf{N} \mathbf{q} = \mathbf{B}_0 \mathbf{q} \quad (2.6)$$

gdzie  $\mathbf{L}_1$  jest operatorem różniczkowym. Po uwzględnieniu macierzy własności sprężystych  $\mathbf{D}$ , otrzymamy macierz sztywności liniowej postaci

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 dV \quad (2.7)$$

Macierz sztywności początkowych przemieszczeń wyznaczamy z części nieliniowej odkształcenia podłużnego  $\varepsilon_n$  (2.5), które można przedstawić jako

$$\varepsilon_n = \mathbf{B}_1(\mathbf{q}) \mathbf{q} \quad (2.8)$$

Macierz początkowych przemieszczeń liniową względem przemieszczeń  $\mathbf{K}_l(\mathbf{q})$  dla sformułowania nieprzyrostowego wyznaczono z zależności

$$\mathbf{K}_l^e(\mathbf{q}) = \int_{V_e} \mathbf{B}_0 \mathbf{D} \mathbf{B}_1 dV \quad (2.9)$$

Macierz początkowych naprężeń można wyznaczyć z

$$\mathbf{k}_\sigma^v = P_0 \int_0^L [\mathbf{N}'^T]_v [\mathbf{N}']_v dx, \quad \mathbf{k}_\sigma^w = P_0 \int_0^L [\mathbf{N}'^T]_{vw} [\mathbf{N}']_{vw} dx, \quad \mathbf{K}_\sigma^e(\sigma) = \mathbf{k}_\sigma^v + \mathbf{k}_\sigma^w \quad (2.10)$$

gdzie:  $P_0$  - jest siłą normalną w przecie.

Problem stateczności zlinearyzowanej opisany jest równaniem zagadnienia własnego postaci

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma(\sigma) + \mathbf{K}_l(\mathbf{q})] \mathbf{v} = 0 \quad (2.11)$$

### 3. RÓWNANIA RUCHU

W przypadku, gdy obciążenie jest funkcją harmoniczną typu

$$\mathbf{P}(t) = \alpha \mathbf{P}^S + \beta \mathbf{P}^Z \Phi(t) = \alpha \mathbf{P}^S + \beta \mathbf{P}^Z \cos \theta t \quad (3.1)$$

i po dołączeniu macierzy mas - otrzymamy równania ruchu stateczności dynamicznej w postaci

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} - \alpha\Lambda - \beta\Pi \cos \theta)\mathbf{q} = 0 \quad (3.2)$$

Równania ruchu (3.2) opisują nieliniowe drgania swobodne układu przy obciążeniu wstępnym. Zawierają składnik zmienny w czasie, a więc opisują one drgania swobodne parametryczne, stanowią układ równań sprzężonych typu Mathieu.

Do analizy tych równań można stosować: metody bezpośredniego całkowania numerycznego oraz metody zakładające rozwiązanie w postaci szeregów, do której należy metoda bilansu harmonicznego.

Układ równań (3.2) ma rozwiązania okresowe o okresach  $T$  i  $2T$ , a zatem wyznaczone dla tych rozwiązań częstości będą stanowić granicę obszarów niestatecznych (rezonansowych) i statecznych (nieresonansowych). Zakładając rozwiązanie w postaci nieparzystego szeregu Fouriera o okresie  $4\pi/\theta$

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (\mathbf{a}_k \sin \frac{1}{2}k\theta t + \mathbf{b}_k \cos \frac{1}{2}k\theta t) \quad (3.3)$$

gdzie:  $\mathbf{a}_k$  i  $\mathbf{b}_k$  - wektory niezależne od czasu, o wymiarze globalnych stopni swobody  $n$  układu.

Warunkiem niezerowych rozwiązań układu równań ruchu (3.3) jest zerowanie się wyznacznika

$$\begin{vmatrix} \mathbf{K} - \alpha\Lambda + \frac{1}{2}\beta\Pi - \frac{1}{4}\theta^2\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} - \alpha\Lambda - \frac{1}{2}\beta\Pi - \frac{1}{4}\theta^2\mathbf{M} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

Wówczas wyznaczone częstości z rozwiązania wyznacznika wyznaczają krzywe, które określają obszar rezonansowy o okresie  $2T$ , nazywany głównym (podstawowym) rezonans parametrycznym.

Z powyższych rozważań wynika, że analiza stateczności dynamicznej układu obciążonego funkcją okresową, polega na wyznaczeniu granic obszarów rezonansów, to znaczy wyznaczenie częstości wymuszenia  $\theta = f(\alpha, \beta)$  w dziedzinie mnożników obciążenia.

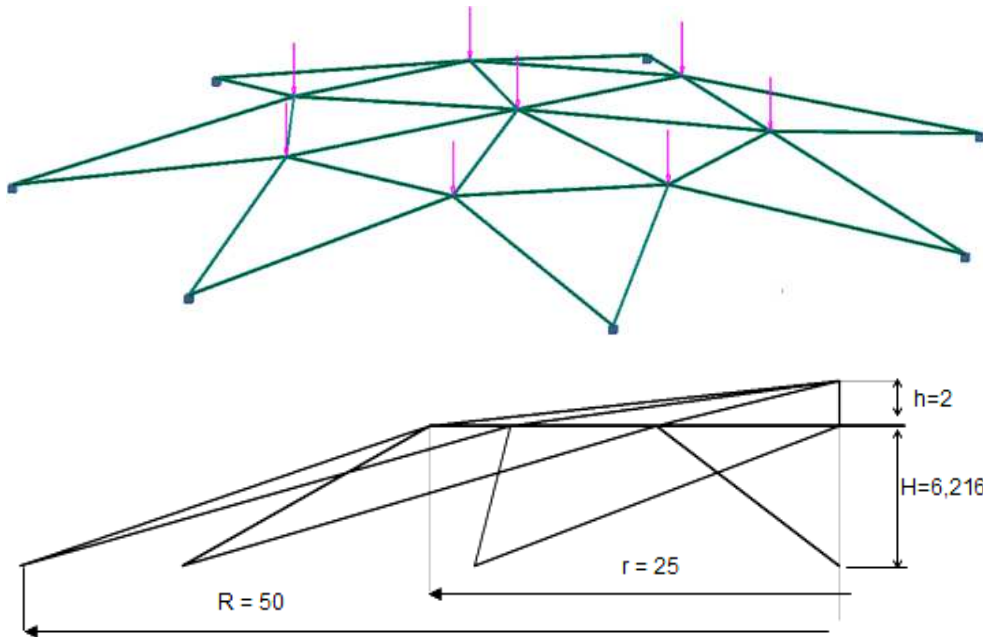
#### 4. WYNIKI I WNIOSKI Z OBLICZEŃ KOPUŁY

Kształt i wymiary kopuły siedmiokątnej (rys.4.1) zaczerpnięto z pracy [2]; na pręty zastosowano kształtownik podwójny dwuteownik IPE 270, o polu przekroju  $A = 91.8\text{cm}^2$ , momentach bezwładności  $J_y = 5022.6\text{cm}^4$ ,  $J_x = 11580\text{cm}^4$ , moduł Younga  $E = 2,1 \cdot 10^5\text{MPa}$ , masa właściwa  $\rho = 7830\text{kg/m}^3$ , promień podstawy  $R = 50\text{m}$ , promień korony  $r = 25\text{m}$ , wysokość do korony  $h = 6,216\text{m}$ , wysokość korony  $h = 2\text{m}$ .

Obciążenie dla kopuły stanowi ciężar własny traktowany, jako obciążenie wstępne – modelowane macierzami  $(\tilde{\mathbf{K}}_\sigma(\sigma) + \tilde{\mathbf{K}}_l(q))$  - oraz obciążenie siłami skupionymi przyłożonymi do węzłów korony i w jej wierzchołku. Tak, więc z zagadnienia własnego (2.11), utworzono wyznacznik

$$\left| \{ \mathbf{K} - (\tilde{\mathbf{K}}_{\sigma}(\sigma) + \tilde{\mathbf{K}}_l(q)) \} + \lambda(\mathbf{K}(\sigma) + \mathbf{K}_l(q)) \right| = 0 \quad (4.1)$$

z rozwiązania, którego otrzymano mnożniki do wyznaczenia wartości sił krytycznych oraz postacie utraty stateczności (rys.4.2).



Rys.4.1 Widok i geometria połowy kopuły

#### Wyniki obliczeń stateczności statycznej

stateczność początkowa

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\sigma}(\sigma)]\mathbf{v} = 0$$

$$\left| \{ \mathbf{K} - \mathbf{K}_{\sigma}^G(\sigma) \} + \lambda \mathbf{K}(\sigma) \right| = 0$$

$$P_{kr}^{(1)} = 62,14 \text{ kN}$$

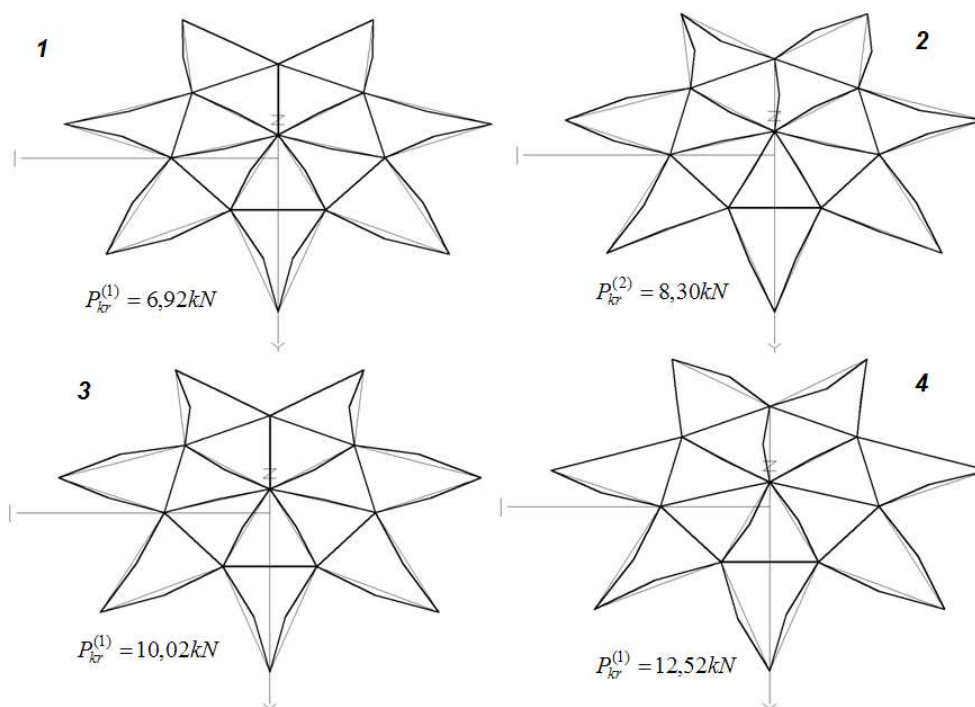
stateczność zlinearyzowana

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\sigma}(\sigma) + \mathbf{K}_l(q)]\mathbf{v} = 0$$

$$\left| \{ \mathbf{K} - (\mathbf{K}_{\sigma}^G(\sigma) + \mathbf{K}_l^G(q)) \} + \lambda(\mathbf{K}(\sigma) + \mathbf{K}_l(q)) \right| = 0$$

$$P_{kr}^{(1)} = 6,92 \text{ kN}$$

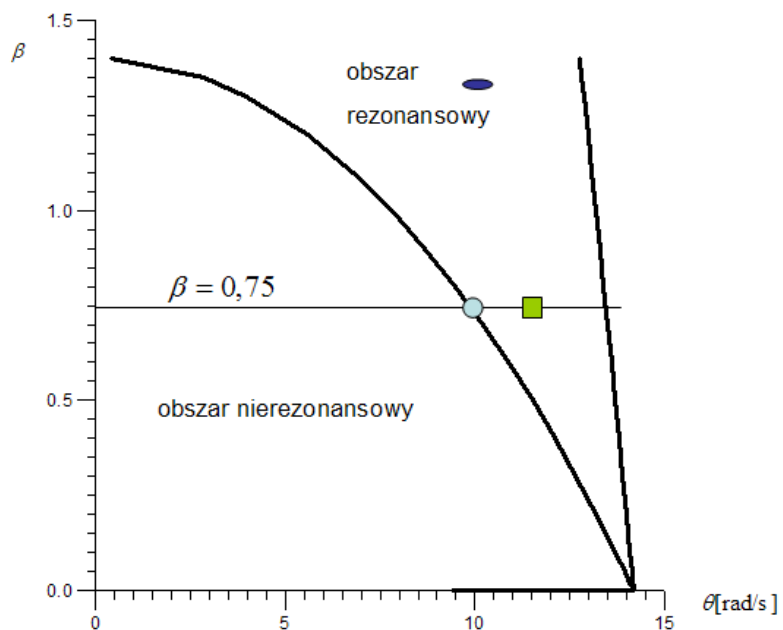
Jak można zauważyć, wartości obciążeń krytycznych otrzymane z rozwiązań stateczności początkowej i zlinearyzowanej zasadniczo się różnią. Przyczyną jest uwzględnienie sztywności przemieszczeniowej  $\mathbf{K}_l(q)$  – wstępnych przemieszczeń przed utratą stateczności – które są zgodne z przemieszczeniami jaki uzyska kopuła prętowa po utracie stateczności. Dlatego też, obciążenie krytyczne jest w tym przypadku niższe 6,92kN od 62,14kN – dla przypadku, gdy nie uwzględniamy  $\mathbf{K}_l(q)$ . Znaczenie sztywności przemieszczeniowej jest tym mniejsze, im przemieszczenia przed utratą stateczności są ortogonalne do przemieszczeń po utracie stateczności i wówczas wyniki obciążeń krytycznych otrzymane ze stateczności początkowej i zlinearyzowanej są do siebie zbliżone.



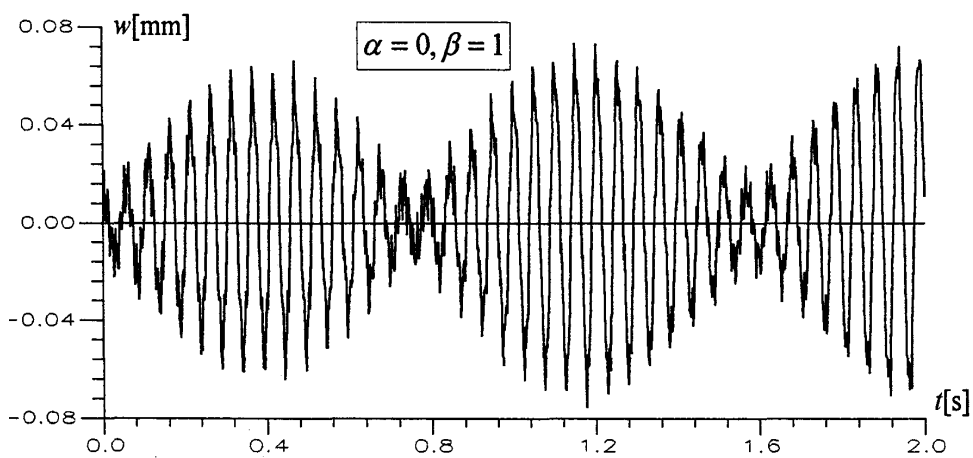
Rys.4.2. Postać wybożenia kopuły dla poszczególnych sił krytycznych wyznaczonych ze stateczności zlinearyzowanej

Następnie, wykonano obliczenia wyznacznika (3.4) biorąc obciążenie ciężarem własnym, jako część stałą  $\alpha \mathbf{P}^s$  wektora obciążenia (3.1)  $\alpha \mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{K}}_\sigma(\sigma) + \tilde{\mathbf{K}}_l(q))$  oraz amplitudę części zmiennej obciążenia  $\beta \Pi$  (z przedziału wartości  $0 \leq \beta \Pi \leq 1,4 * P_{kr}^{(1)}$ ) tak, że każda z sił przyłożonych do korony jest typu  $\beta \mathbf{P}^z \Phi(t) = \beta \Pi \cos \theta t$ . Wyniki obliczeń w postaci głównego obszaru częstości rezonansowych  $\theta$  przedstawiono na rys.4.3. Obszar rozpoczyna się od podwójnej wartości drgań własnych pod obciążeniem ciężarem własnym  $2\omega_{01} = 9,41 \text{ rad/s}$ .

Równania ruchu (3.2) rozwiązano również metodą Newmarka [4] całkowania bezpośredniego, otrzymując przebiegi drgań przedstawione na rys.4.4 – 4.8.

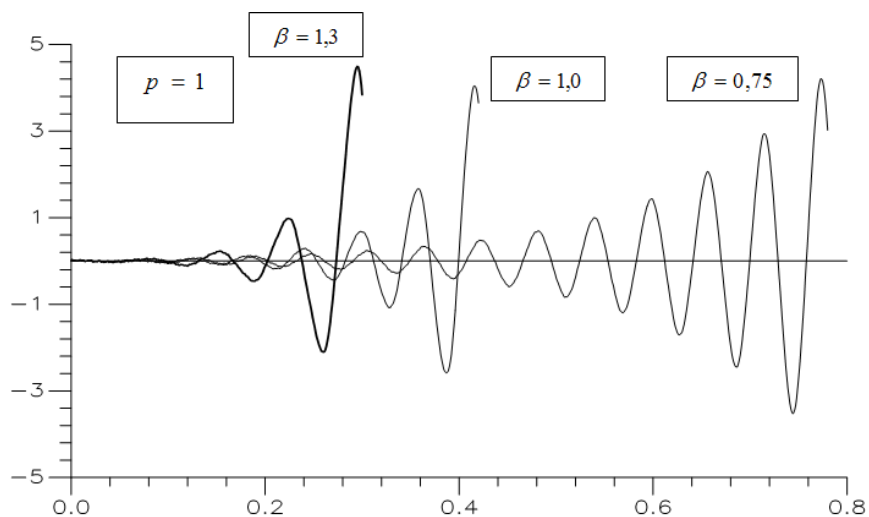


Rys.4.3. Obszary rezonansowy i nierezonansowy pierwszej częstotliwości wymuszenia

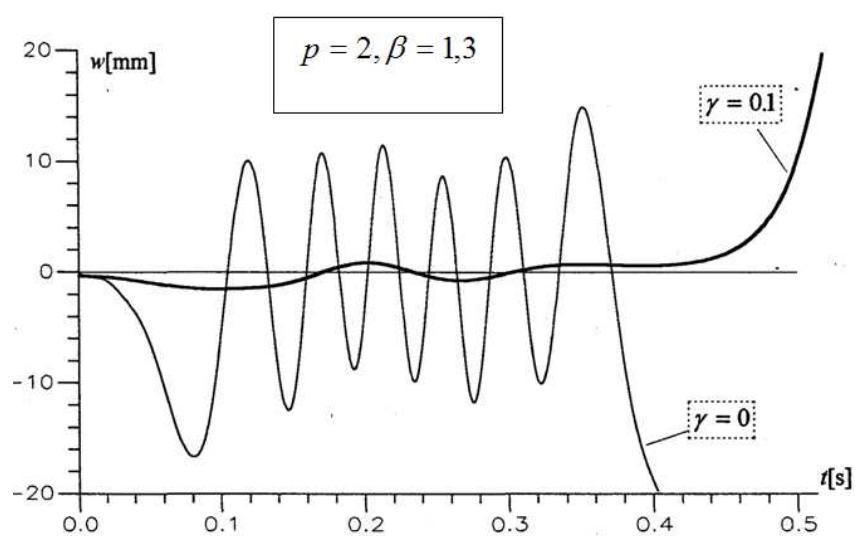


Rys.4.4. Przebieg drgań typu dudnienie gdy częstota wymuszenia pochodzi z krzywej granicznej rozdzielającej obszary nierezonansowe od rezonansowych





Rys.4.5. Przebieg drgań typu flutter gdy częstość wymuszenia pochodzi z obszaru rezonansowego  $p=1$  dla różnych głębokości modulacji  $\beta$



Rys.4.6. Przebieg drgań typu flutter gdy częstość wymuszenia pochodzi z obszaru rezonansowego  $p=2$  dla różnych wartości tłumienia  $\gamma$

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Bołotin B., *Dinamiczieskaja ustojczywost uprugich sistem*, Gos. Izd. Tech.-Teor. Lit. Moskwa 1956r.
- [2] Magnucki K., Optymalna liczba kątów wielokątnej kopuły prętowej ze względu na jej

- stateczność, *VI Sympozjum Stateczności konstrukcji*, Spała 5-6.11.1991r.
- [3] Stachura S., Wpływ obciążenia wstępnego na stateczność dynamiczną konstrukcji prętowych i powłokowych, *Rozprawa doktorska*, WAT 1997r.
- [4] Stachura S., *Stateczność powłoki walcowej pod obciążeniem harmonicznym*, *Logistyka* nr 6/2010.
- [6] Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M., *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*, Warszawa, Arkady 1990.
- [7] Wieczorek M., *Numeryczna analiza konstrukcji podatnych na wyboczenie*, WAT, Dodatek do biuletynu nr 11(411), Warszawa 1986.