

*drżania skrętne belki i płyty,  
metoda energetyczna, dyskretny schemat zastępczy belki i płyty,  
częstości kołowe, okresy drgań*

Wacław SZCZEŚNIAK<sup>1</sup>  
Magdalena ATAMAN<sup>1</sup>

## DRGANIA SKRĘTNE PODWIESZONEJ BELKI I PŁYTY

*W pracy przeanalizowano drżania skrętne podwieszonych belki oraz podwieszonych płyt: kwadratowej i trójkątnej. Równania ruchu analizowanych układów wyprowadzono stosując metodę energetyczną. Zarówno w przypadku belki jak i płyty kwadratowej oraz płyty w kształcie trójkąta równobocznego zastosowano dyskretne schematy zastępcze o masach skupionych. Wyznaczono częstości kołowe oraz okresy drgań belki i płyt.*

## TORSIONAL VIBRATIONS OF BEAM AND PLATE

*In the paper torsional vibrations of a beam and plates are analysed. Equation of motion of beam as well as equations of motion of plates are derived using energy method. Substitutive, discrete systems are used for the beam, the square plate and the triangular plate. Frequencies and vibration periods of beam and plates are determined.*

### 1. WSTĘP

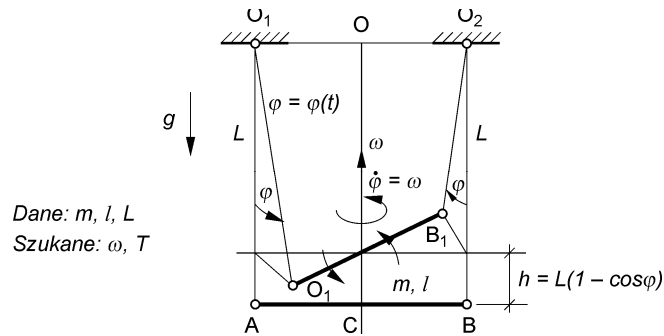
Przedmiotem pracy jest analiza drgań skrętnych podwieszonych belki oraz podwieszonych płyt. Do wyprowadzenia równań ruchu analizowanych układów wykorzystano metodę energetyczną. Zarówno w przypadku belki jak i płyty kwadratowej oraz płyty w kształcie trójkąta równobocznego zastosowano dyskretne schematy zastępcze. W przypadku wszystkich trzech układów rozwiązano ich równania drgań, wyznaczając częstości kołowe oraz okresy drgań belki i płyt.

### 2. DRGANIA SKRĘTNE PODWIESZONEJ BELKI I PŁYTY

Niech jednorodna sztywna, pozioma belka AB o masie całkowitej  $m$  i długości  $l$  będzie podwieszona za oba końce na dwóch jednakowych nierozciągliwych linkach pionowych o danej długości  $L$ . W położeniu równowagi statycznej obie linki są do siebie równoległe. Naszym zadaniem będzie wyznaczenie częstości kołowej i okresu małych drgań powstałych przy małym obrocie belki dookoła osi pionowej OC, przechodzącej przez jej środek masy C, jak na rysunku 1.

---

<sup>1</sup> Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16,  
tel.: +48 22 234 65 07, e-mail: w.szczesniak@il.pw.edu.pl;  
tel.: +48 22 234 64 70, e-mail: m.ataman@il.pw.edu.pl;



Rys. 1. Schemat dynamiczny sztywnej belki podwieszanej na linach; małe drgania dookoła położenia równowagi statycznej

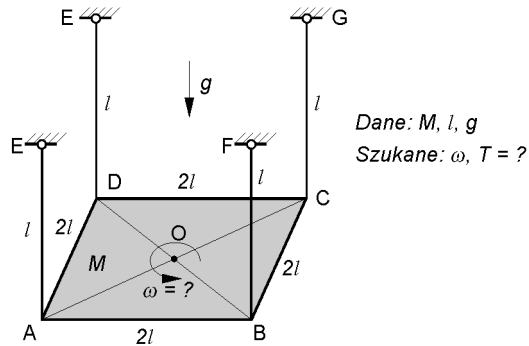
Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 1 jako współrzędną uogólnioną przyjmujemy mały kąt obrotu linek  $\varphi = \varphi(t)$ . Do rozwiązania zadania wykorzystujemy metodę energetyczną. Zatem, energię kinetyczną zastępczego układu mas skupionych na belce, energię potencjalną, równanie ruchu belki, częstość kołową oraz okres drgań określimy następującymi wzorami:

$$E_k = 2 \frac{1}{2} \frac{m}{6} L^2 (\dot{\varphi}), \quad V = E_p = m g L (1 - \cos \varphi), \quad \frac{d}{dt}(E_k + V) = 0,$$

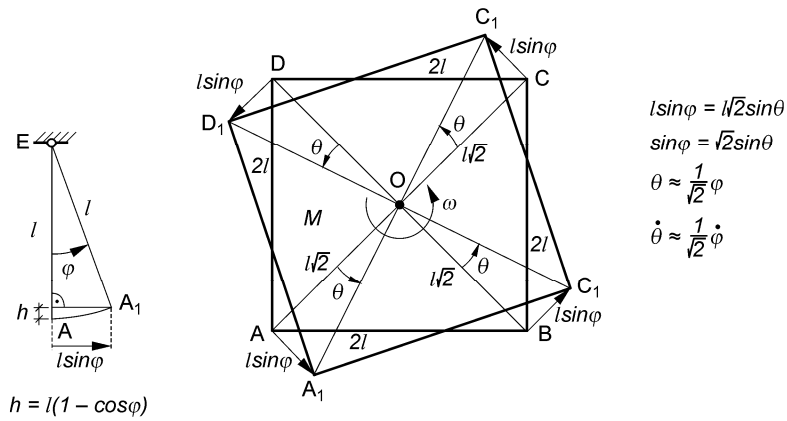
$$\left( \frac{1}{3} m L^2 \ddot{\varphi} + m g L \sin \varphi \right) \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} \neq 0, \quad \sin \varphi \cong \varphi, \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3g}{L} \varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{3g}{L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{3g}}, \quad f = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{L}{3g}}.$$

W podobny sposób znajdziemy częstotliwość i okres małych drgań cienkiej kwadratowej płytki ABCD, zawieszanej w narożnikach na czterech jednakowych linkach każda o długości  $l$ . Kwadratowa płytka jest sztywna i jednorodna o masie całkowitej  $M$  i o długości boku  $2l$ , tak jak na rysunku 2. I to zadanie również rozwiązujemy metodą energetyczną, a za współrzędną uogólnioną przyjmiemy mały kąt obrotu  $\varphi = \varphi(t)$ , o który obróci się każda linka w płaszczyźnie prostopadłej do przekątnej płytki w każdym narożniku. W wyniku małych drgań sama płytka obróci się o kąt  $\theta = \theta(t)$  dookoła swojego środka masy  $O$ , tak jak na rysunku 3.



Rys. 2. Schemat dynamiczny cienkiej, sztywnej płytki



Rys. 3. Mały obrót płytki o kąt  $\theta = \theta(t)$  oraz mały obrót linki o kąt  $\varphi = \varphi(t)$

Jednocześnie cała płytka podniesie się na wysokość  $h$ . Równania więzów zapisujemy w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 l \sin \varphi &= l \sqrt{2} \sin \theta, & \sin \varphi &= \varphi, & \sin \theta &= \theta, \\
 \sin \varphi &= \sqrt{2} \sin \theta \leftrightarrow \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi, & \dot{\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Energia kinetyczna i energia potencjalna wyrażają się poniższymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 E_k &= \frac{1}{2} J_O (\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \frac{M (2l)^2}{6} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\varphi} \right)^2 = \frac{1}{6} M l^2 \dot{\varphi}^2, \\
 V &= E_p = Mgh = Mgl(1 - \cos \varphi).
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Natomiast równanie ruchu płytki, częstość kołowa i okres małych drgań są następujące:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (E_k + V) &= 0, \\ \left( \frac{1}{3} M l^2 \ddot{\varphi} + M g l \sin \varphi \right) \dot{\varphi} &= 0, \quad \dot{\varphi} \neq 0, \quad \sin \varphi \cong \varphi, \quad \ddot{\varphi} + \frac{3g}{l} \varphi = 0, \\ \omega^2 &= \frac{3g}{l}, \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}, \\ T = \frac{2\pi}{\omega} &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g}}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g}{l}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Poprawność rozwiązania możemy potwierdzić, wykorzystując ideę zastępczego, dyskretnego układu mas skupionych, równoważnych płytce wyjściowej. Zakładając w narożnikach cztery jednakowe masy skupione  $m_1$ , a w środku płytki masę  $m_2$ , otrzymujemy:

$$4 m_1 + m_2 = M, \quad 4 m_1 (l\sqrt{2})^2 = \frac{1}{6} M (2l)^2, \quad m_1 = \frac{1}{12} M, \quad m_2 = \frac{2}{3} M. \quad (5)$$

Układ mas zastępczych w płytce kwadratowej pokazano na rysunku 4. Cztery masy skupione w narożnikach stanowią cztery wahadła matematyczne z linkami o długości  $l$ . Energia kinetyczna zastępczego układu jest zatem równa

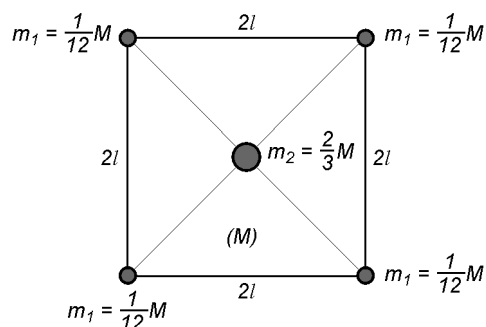
$$E_k = \frac{1}{2} 4 \frac{M}{12} l^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} M \dot{\varphi}^2 l^2, \quad (6)$$

i jest taka sama jak w równaniu (3)<sub>1</sub>. Energia potencjalna również nie ulega zmianie i równanie ruchu (4)<sub>2</sub> pozostaje bez zmian.

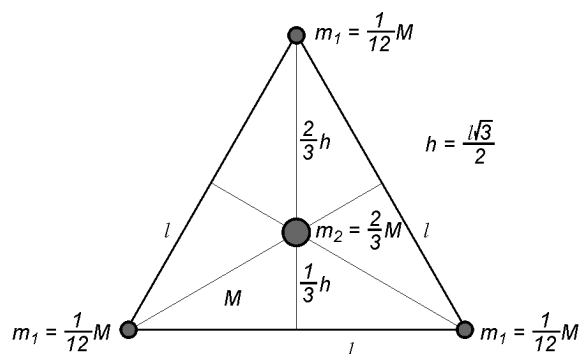
W przypadku cienkiej, poziomej płytki w kształcie trójkąta równobocznego o masie  $M$  i boku  $l$ , zawieszonej w narożnikach na trzech poziomych linkach również o długości  $l$ , postępując identycznie jak poprzednio, zgodnie z oznaczeniami na rysunku 5, przy tej samej współrzędnej uogólnionej  $\varphi = \varphi(t)$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 3m_1 + m_2 &= M, \quad 3m_1 \left( \frac{2}{3} \frac{l\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} M l^2, \quad m_1 = \frac{1}{12} M, \quad m_2 = \frac{3}{4} M, \\ E_k &= \frac{1}{2} 3 \frac{M}{12} \dot{\varphi}^2 l^2, \quad V = E_p = M g l (1 - \cos \varphi), \quad \frac{d}{dt} (E_k + V) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{4g}{l} \varphi = 0, \quad \omega = 2 \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Rys. 4. Zastępczy, dyskretny układ mas skupionych w płycie kwadratowej



Rys. 5. Zastępczy, dyskretny układ mas skupionych w płycie w kształcie trójkąta równobocznego

### 3. WNIOSKI

Podobnie jak w zadaniach przedstawionych w pracy [7], tak i w przypadku belki i płyt podwieszonych mamy do czynienia z układami o jednym stopniu swobody. Otrzymane w pracy równania ruchu, po zlinearyzowaniu, można w łatwy sposób rozwiązać otrzymując ściśle rozwiązania analityczne. Wprowadzenie zastępczych układów dyskretnych, o masach skupionych, dodatkowo ułatwia rozwiązanie zadań.

### 4. LITERATURA

- [1] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna w zadaniach dla dociekliwych*. OW PW, Warszawa 2010.
- [2] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych*. OW PW, Warszawa 2007.
- [3] Szcześniak W.: *Dynamika analityczna i <<MATHEMATICA>>*. OW PW, Warszawa 2005.

- [4] Szcześniak W., Ataman M.: *Modelowanie dynamiczne cieczy w cysternie za pomocą układu „obręcz-kula”*. *Drgania poprzeczne*. 11<sup>th</sup> International Conference „Computer Systems Aided Science, Industry and Transport”, Transcomp 2007, Vol. 2, Zakopane 2007, pp. 277-282.
- [5] Szcześniak W., Ataman M.: *Modelowanie dynamiczne cieczy w cysternie za pomocą układu „obręcz-kula”*. *Drgania obrotowe*. 11<sup>th</sup> International Conference „Computer Systems Aided Science, Industry and Transport”, Transcomp 2007, Vol. 2, Zakopane 2007, pp. 283-287.
- [6] Szcześniak W., Ataman M., Kwaśniewski L.: *Dynamic analysis of liquid motion in a tank using hoop and ball method with damping*. Computer Systems Aided Science and Engineering Work in Transport, Mechanics and Electrical Engineering. Monograph No122, Radom 2008, pp. 517-522.
- [7] Szcześniak W., Ataman M.: *Drgania własne sztywnego cylindra eliptycznego*. VII Konferencja Naukowo-Techniczna „Logistyka, Systemy Transportowe, Bezpieczeństwo w Transporcie” Logitrans 2010, ibid.
- [8] Hand L.M., Finch J.D.: *Analytical mechanics*. Cambridge University Press 1998.
- [9] Gutowski R.: *Mechanika analityczna*. PWN, Warszawa 1971.
- [10] Pjatnicki E.S. i inni: *Sbornik zadacz po analiticheskoj miechanikie*. Nauka-Fizmatlit. Moskwa 1980 i 1996.
- [11] Nagórski R., Szcześniak W.: *Mechanika teoretyczna, t. 1-2*. OW PW, Warszawa 1993.
- [12] Szcześniak W., Ataman M.: *Analiza nieliniowego równania ruchu wahadła cykloidalnego Ch. Huygensa*. Prace Naukowe Politechniki Radomskiej, Transport nr 3(23), 2005, str. 485-490.
- [13] Szcześniak W., Ataman M.: *Swobodne drgania nieliniowe sztywnej tarczy półkolistej oraz półobręczy na sztywnym podłożu*. Prace Naukowe Politechniki Radomskiej, Transport nr 3(23), 2005, str. 491-498.
- [14] Szcześniak W., Ataman M.: *Zastosowanie pakietu Mathematica w mechanice analitycznej*. Prace Naukowe Politechniki Radomskiej, Transport nr 1(17), 2003, str. 617-626.
- [15] Timoshenko S.P., Young D.H.: *Advanced dynamics*. McGraw-Hill, New York 1948.
- [16] Smart H.E.: *Advanced dynamics, Vol. I-II* MacMillan, London 1951.
- [17] Spiegel M.R.: *Theory and problems of theoretical mechanics*. McGraw-Hill (Schaum), New York 1967.
- [18] Wells D.A.: *Theory and problems of Lagrangian dynamics*. McGraw-Hill (Schaum), New York 1967 and *Lagrangian Dynamics*. Schaum's Outline, McGraw-Hill 2003.
- [19] Seto W.W.: *Theory and problems of mechanical vibrations*. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill New York 1964.