

Mirosław LUFT¹
Radosław CIOĆ²
Daniel PIETRUSZCZAK³

PORÓWNANIE KLASYCZNEGO I RÓŻNICZKOWO-CĄŁKOWEGO MODELU SYSTEMU POMIAROWEGO

Artykuł jest odpowiedzią na konieczność stosowania rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów w różnych dziedzinach nauki takich jak teoria sterowania czy miernictwo dynamiczne. W pracy zaprezentowano system pomiarowy, który zamodelowano zarówno równaniem różniczkowym 2-go rzędu jak i rachunkiem różniczkowo-całkowym ułamkowych rzędów. Badania symulacyjne wykonano w środowisku programistycznym Matlab-Simulink.

COMPARISON OF MEASUREMENT SYSTEMS MODELLED BY MEANS OF CLASSICAL DIFFERENTIAL EQUATION AND FRACTIONAL CALCULUS

The article is inspired by developments in the fractional calculus in different areas of science such as control theory and electrical measurements. A model of measurement system is presented, modelled by means of both the classical 2nd order differential equation and fractional calculus. Tests are executed in the programming environment Matlab-Simulink.

1. WSTĘP

Dynamiczny rozwój badań w ostatnich latach nad zastosowaniem rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów (krócej: różniczkowo-całkowego lub ułamkowego) do analizy układów dynamicznych, skłania do podjęcia próby jego użycia w modelowaniu systemów pomiarowych [2], [7].

Modelowanie rzeczywistego systemu pomiarowego składającego się z wielu urządzeń wymusza uwzględnienie dynamiki odpowiedzi każdego z nich. Na podstawie znajomości sygnału wymuszenia i sygnału odpowiedzi możliwe jest uzyskanie opisu dynamiki systemu

¹ Politechnika Radomska im. Kazimierza Pułaskiego, Wydział Transportu i Elektrotechniki,
ul. Malczewskiego 29, Radom, e-mail: m.luft@pr.radom.pl

² Politechnika Radomska im. Kazimierza Pułaskiego, Wydział Transportu i Elektrotechniki,
ul. Malczewskiego 29, Radom, e-mail: r.cioc@pr.radom.pl

³ Politechnika Radomska im. Kazimierza Pułaskiego, Wydział Transportu i Elektrotechniki,
ul. Malczewskiego 29, Radom, e-mail: d.pietruszczak@pr.radom.pl

w postaci równania różniczkowego. Dokładność tak uzyskanego modelu zależy głównie od stosowanej metody identyfikacji. Zastosowanie w procesie identyfikacji rachunku różniczkowo-całkowego stwarza nowe możliwości uzyskania modelu dokładniej odzwierciedlającego dynamikę badanego obiektu.

Dynamikę procesów fizycznych takich jak przyspieszenie, przemieszczenie, przepływ cieczy, natężenie prądu elektrycznego modeluje się zwykle równaniami różniczkowymi. Klasyczny zapis dynamiki przetworników pomiarowych opiera się na równaniach różniczkowych, które stanowią ich matematyczny model w dziedzinie czasu. Równanie takie ma postać:

$$\begin{aligned} A_i \frac{d^{(i)}y}{dt^{(i)}} + A_{m-1} \frac{d^{(i-1)}y}{dt^{(i-1)}} + \dots + A_0 y(t) = \\ = B_j \frac{d^{(j)}f(x)}{dt^{(j-1)}} + B_{m-1} \frac{d^{(j-1)}f(x)}{dt^{(j-1)}} + \dots + B_0 f(x) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: $y = f(x)$.

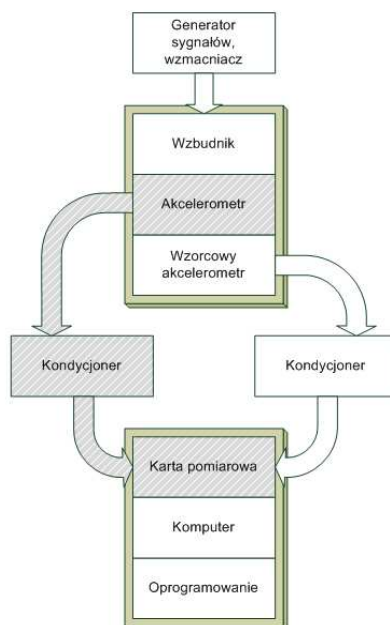
W przypadku rachunku różniczkowo-całkowego operatory różniczkowania i całkowania funkcji łączą się w jeden operator D^n .

Dla różniczkowania, rząd n przyjmuje wartości dodatnie $n = 1, 2, 3, \dots$ a dla całkowania wartości ujemne $-n = -1, -2, -3, \dots$. Definiowany jest też operator neutralny dla rzędu $n = 0$ [2], [7]:

$$D^n f(t) = \begin{cases} \frac{d^n f(t)}{dt^n} & \text{dla } n > 0 \\ f(t) & \text{dla } n = 0 \\ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \dots \int_{t_0}^{\tau_{-n-1}} f(\tau_{-n}) d\tau_{-n} \dots d\tau_2 \Big] d\tau_1 & \text{dla } n < 0 \end{cases} \quad (2)$$

2. ALGORYTM IDENTYFIKACJI SYSTEMU POMIAROWEGO

W pracy wykorzystano laboratoryjny system do badania charakterystyk dynamicznych akcelerometrów pokazany na rysunku 1. Zamodelowano system składający się z akcelerometru, kondycjonera i karty pomiarowej [5], [6]. Równanie opisujące dynamikę tego systemu wyznaczono za pomocą metody autoregresji z zewnętrznym wymuszeniem ARX [1]. Identyfikowanym sygnałem jest sygnał napięciowy z końca badanego toru pomiarowego, sygnałem porównawczym – sygnał z akcelerometru wzorcowego będący odpowiedzią na wymuszenie sinusoidalne generatora o częstotliwości 200 Hz.



Rys.1. Schemat blokowy laboratoryjnego systemu pomiarowego do badania przetworników pomiarowych [6]

W wyniku działania metody identyfikacji ARX otrzymano transmitancję $G(s)$ opisującą dynamikę systemu:

$$G(s) = \frac{0,03215s^2 + 1319,6s + 1,338 \cdot 10^6}{s^2 + 4,678 \cdot 10^4 s + 2,309 \cdot 10^7} \quad (3)$$

Na podstawie transmitancji ciągłej wyznaczona została transmitancji dyskretna dla czasu próbkowania $T_p = 0,0000001$ s.

$$G(z) = \frac{0,03215z^2 - 0,05368z + 0,02163}{z^2 - 1,625z + 0,6264} \quad (4)$$

Transmitancję dyskretną (4) można zapisać w postaci ogólnej równania różnicowego:

$$\begin{aligned} a_2 w_k + a_1 w_{k-1} + a_0 w_{k-2} &= \\ &= b_2 x_k + b_1 x_{k-1} + a_0 x_{k-2} \end{aligned} \quad (5)$$

lub jako równanie macierzowe:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ w_{k-1} \\ w_{k-2} \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

Równanie różnicowe (5) w zapisie różniczkowo – całkowym ma postać:

$$\begin{aligned} A_2 \Delta_k^{(2)} w_k + A_1 \Delta_k^{(1)} w_k + A_0 w_k &= \\ &= B_2 \Delta_k^{(2)} w_k + B_1 \Delta_k^{(1)} w_k + B_0 w_k \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie $\Delta_k^{(n)}$ jest różnicą wsteczną funkcji dyskretnej definiowaną jako:

$$\Delta_k^{(n)} f_{(k)} = \sum_{j=0}^k a_j^{(n)} f_{(k-j)} \quad (8)$$

Po uwzględnieniu wyrażenia (8) równanie (7) w zapisie macierzowym przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_2 & -a_1 - 2a_0 & a_2 + a_1 + a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_k^{(2)} w_k \\ \Delta_k^{(1)} w_k \\ \Delta_k^{(0)} w_k \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 - 2b_0 & b_2 + b_1 + b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_k^{(2)} x_k \\ \Delta_k^{(1)} x_k \\ \Delta_k^{(0)} x_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

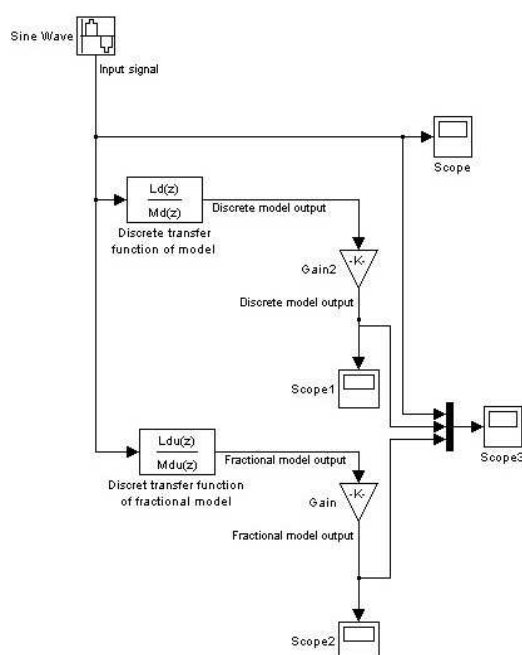
Ostatecznie współczynniki równania (7) są równe:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0001, A_1 = -0,0106, A_2 = 0,0322, \\ B_0 &= 0,0018, B_1 = -0,3755, B_2 = 1 \end{aligned} \quad (10)$$

3. PORÓWNANIE MODELI SYSTEMU POMIAROWEGO W ZAPISIE DYSKRETNEJ TRANSMITANCJI I ZAPISIE POCHODNO-CAŁKOWYM

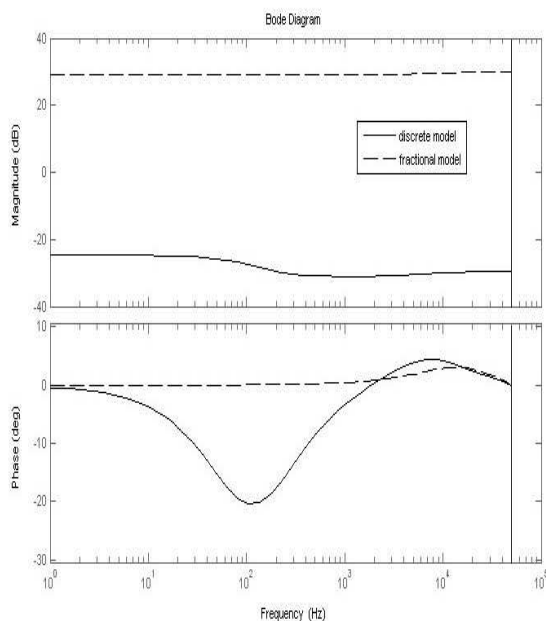
Porównano modele rzeczywistego systemu pomiarowego w postaci dyskretnej transmitancji (4) oraz modelu zapisanego równaniem różniczkowo-całkowym (7) o współczynnikach (10). Obydwa modele wyznaczono na podstawie modelu ciągłego (3) uzyskanego za pomocą metody identyfikacji ARX [1]. W badanym systemie zastosowano akcelerometr o czułości $10,18 \text{ mV/ms}^{-2}$. Sygnał wzorcowy otrzymano z akcelerometru referencyjnego o czułości 317 mV/ms^{-2} .

Na rysunku 2 pokazano schemat blokowy symulacji układu pomiarowego wykonany w pakiecie Matlab-Simulink [8]. Symulacje wykonano metodą całkowania ode3 z czasem próbkowania $0,00001 \text{ s}$ dla sinusoidalnego sygnału wejściowego o częstotliwości 200 Hz .



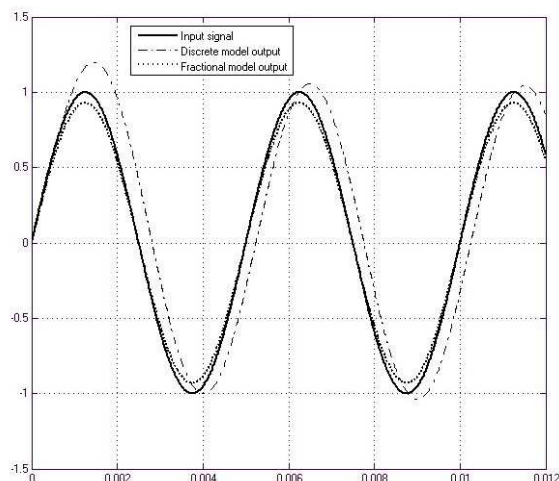
Rys.2. Schemat blokowy symulacji dla systemu pomiarowego [5], [6]

Duże wzmocnienie widoczne na charakterystyce amplitudowej modelu dyskretnego (rysunek 3) wynika z zastosowania do badania sygnałów napięciowych. Referencyjny poziom wzmocnienia wyznaczony jako stosunek czułości przetwornika pomiarowego do wzorcowego w skali logarytmicznej $W_r = -29,87$ dB. Dla tej wartości stosunek przyspieszenia wyznaczonego na podstawie sygnału napięciowego czujnika pomiarowego do przyspieszenia określonego za pomocą czujnika wzorcowego równy jest 1. Dla wyznaczonego modelu dyskretnego zaobserwować można znaczne przesunięcie fazowe zależne od częstotliwości sygnału wejściowego. W przypadku zastosowania modelu pochodno-całkowego uzyskano stabilność przesunięcia fazowego.



Rys.3. Charakterystyki Bodego modelu o transmitancji dyskretnej i modelu różniczkowo-całkowego [5], [6]

Uzyskane charakterystyki (rysunek 4) potwierdzają wyniki uzyskane z badań charakterystyk amplitudowo-fazowych modelu pochodno-całkowego: zmniejszenie przesunięcia fazowego oraz uzyskanie mniejszej amplitudy sygnału niż sygnał wzorcowy. Zwrócić trzeba uwagę na zachowanie modelu pochodno-całkowego na początku symulacji. Odpowiedź tego modelu nie ma stanu przejściowego wynikającego z rozruchu w przeciwieństwie do modelu dyskretnego.



Rys.4. Porównanie odpowiedzi modelu dyskretnego i modelu pochodno-całkowego z sygnałem wejściowym [5], [6]

4. WNIOSKI

Pochodna i całka dowolnych rzędów otwierają wiele możliwości w dziedzinie identyfikacji układów dynamicznych, tworzenia nowych, nieosiągalnych wcześniej algorytmów sterowania w układach ze sprzężeniami zwrotnymi. Można również rozważać rzędy jako funkcje czasu. Prowadzi to do równań różniczkowych o zmiennych, zależnych od czasu, rzędach. Należy tutaj podkreślić, że powszechnie znane pochodne są przypadkami szczególnymi prezentowanego w artykule rachunku. Całkowity rząd całki rozumiany jest jako odpowiadający krotności całki oznaczonej. Należałoby, zatem mówić o rachunku różniczkowym i całkowym rzędu całkowitego i niecałkowitego, czyli dowolnego.

Dalszych badań wymaga sprawdzenie jak model systemu pomiarowego wyznaczony metodą różniczkowo-całkową ułamkowych rzędów odzwierciedla rzeczywisty system oraz czy oddaje on dokładniej dynamikę przetwarzania sygnału wejściowego niż model opisany klasycznymi równaniami różniczkowymi.

5. BIBLIOGRAFIA

- [1] Cioć R.: *Korekcja charakterystyk dynamicznych przetworników pomiarowych w diagnostyce wibracyjnej wagonu kolejowego*, Rozprawa doktorska, Biblioteka Główna Politechniki Radomskiej, Radom 2007
- [2] Kaczorek T.: *Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2009
- [3] Luft M., Cioć R., Pietruszczak D.: *Measurement transducer modelled by means of classical integer-order differential equation and fractional calculus*, Proceedings of the 8th International Conference ELEKTRO 2010, ISBN 978-80-554-0196-6, Zilina 2010

-
- [4] Luft M., Cioć R., Pietruszczak D.: *Porównanie klasycznego i różniczkowo-całkowego modelu przetwornika pomiarowego*, ISSN 1231-5478, Logistyka nr 6/2010
 - [5] Luft M., Szychta E., Cioć R., Pietruszczak D.: *Application of fractional calculus in identification of the measuring system*, Gdynia 2011, artykuł zgłoszony na konferencję *TransNav 2011*, Gdynia 2011
 - [6] Luft M., Szychta E., Cioć R., Pietruszczak D.: *Application of fractional calculus in modelling of the transducer and the measurement system*, artykuł zgłoszony do publikacji w czasopiśmie *Przegląd Elektrotechniczny*, Warszawa 2011
 - [7] Ostalczyk P.: *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowanie w automatyce*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, ISBN 978-83-7283-245-0, Łódź 2008
 - [8] Matlab®&Simulink®, The MathWorks™, 2008