

Arkadiusz BARCZAK¹

FORMALIZACJA SUBIEKTYWNEJ NIEPEWNOŚCI

W wielu sytuacjach decyzyjnych dominuje niepewność, określana jako niepewność subiektywna, uniemożliwiająca wykorzystanie metod klasycznej teorii rachunku prawdopodobieństwa. Stąd konieczność zastosowania do wnioskowania metod formalizacji niepewności subiektywnej. W artykule przedstawiono istotę wybranych metod formalizacji niepewności subiektywnej, wskazując na możliwości ich praktycznego wykorzystania. Zaprezentowano przykład zastosowania metody nieprecyzyjnego prawdopodobieństwa (metoda Dempstera-Shafera) do syntezy wnioskowania na podstawie opinii ekspertów.

EPISTEMIC UNCERTAINTY FORMALIZATION

In many decision making situations the epistemic uncertainty plays the significant role, which excludes the possibility of the usage of the classical probabilistic theorem. This kind of problems necessitate the formal representation of models of the epistemic uncertainty. In this paper, several methods used in solving epistemic uncertainty problems are presented. Also, the practical example which makes use of the Dempster-Shafer theorem in synthesis inferences of experts' opinions is shown.

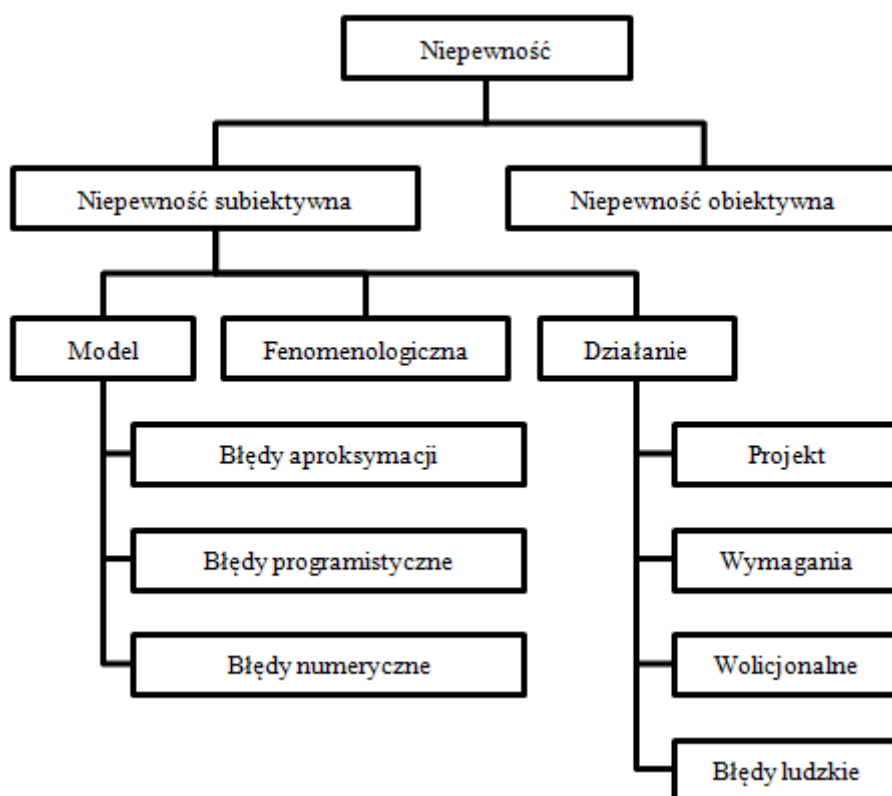
1. WSTĘP

Ryzyko, bezpieczeństwo, sukces, podejmowanie decyzji związane są z niepewnością. W wielu sytuacjach decyzyjnych dominuje niepewność, określana jako niepewność subiektywna (na przykład niekompletna wiedza), dlatego wnioskowanie z wykorzystaniem metod klasycznej teorii rachunku prawdopodobieństwa nie jest możliwe. Stąd konieczność zastosowania do wnioskowania metod umożliwiających formalizację niepewności subiektywnej (*epistemic uncertainty*).

Odpowiednia interpretacja pojęcia „niepewność” w procesach projektowania i eksploatacji złożonych systemów jest szczególnie istotna. Wprowadzono pojęcie niepewności obiektywnej (*aleatory uncertainty*), związanej z losowym charakterem badanego procesu, opisywanej pojęciami z klasycznej teorii prawdopodobieństwa, oraz pojęcie niepewności subiektywnej (*epistemic uncertainty*) związanej z niepewną wiedzą

¹Politechnika Poznańska, Instytut Silników Spalinowych i Transportu, arkadiusz.barczak@put.poznan.pl

oraz niepełną informacją [1-7]. Schemat klasyfikacji niepewności w odniesieniu do badania złożonych systemów przedstawiono na Rys. 1.



Rys.1. Schemat klasyfikacji niepewności w odniesieniu do badania złożonych systemów

Powszechnie stosowana metoda wnioskowania z wykorzystaniem klasycznej teorii prawdopodobieństwa traci swoją skuteczność w przypadkach, gdy informacja jest niepełna, nieprecyzyjna oraz niepewna – a zatem w przypadkach, gdy w procesie wnioskowania pojawia się niepewność subiektywna.

Uogólnioną teorię wnioskowania przy subiektywnej niepewności przedstawiono w [6]. Teoria ta (*coherent lower previsions*) stanowiła podstawę dla opracowania analitycznych metod: metoda zbiorów losowych (*random sets*) [3,6], metoda prawdopodobieństwa interwałowego (*probability intervals*) [2,6] oraz metoda dystrybucji możliwości (*possibility distributions*) [3,5,6]. Metody te, określane jako metody nieprecyzyjnego prawdopodobieństwa (*imprecise probability*), umożliwiają rozwiązywanie rzeczywistych zagadnień w warunkach niepewności subiektywnej.

W artykule przedstawiono przykład zastosowania metody nieprecyzyjnego prawdopodobieństwa (metoda Dempstera-Shafera) do syntezy wnioskowania na podstawie opinii ekspertów.

2. METODY NIEPRECYZYJNEGO PRAWDOPODOBIENSTWA

Klasyczna przestrzeń prawdopodobieństwa opisana jest miarą addytywną. Nieklasyczną (nieprecyzyjną) przestrzeń prawdopodobieństwa charakteryzują miary podaddytywne (*sub-additivity*) oraz nadaddytywne (*super-additivity*) [6].

Niepewność sformalizowana nieprecyzyjnym prawdopodobieństwem jest reprezentowana rodziną \wp rozkładów prawdopodobieństwa zdefiniowaną na skończonym zbiorze $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Wprowadzone zostały dolne ograniczenie prawdopodobieństwa $\underline{P}(A)$ oraz górne ograniczenie prawdopodobieństwa $\bar{P}(A)$ zdefiniowane w postaci:

$$\underline{P}(A) = \inf_{P \in \wp} P(A) \quad (1)$$

$$\bar{P}(A) = \sup_{P \in \wp} P(A) \quad (2)$$

gdzie: $A \subseteq X$

Przy wprowadzonych ograniczeniach, rodzina $\wp_{\underline{P}, \bar{P}}$ rozkładów prawdopodobieństwa przyjmuje postać:

$$\wp_{\underline{P}, \bar{P}} = \{P \mid \forall A \subseteq X, \underline{P}(A) \leq P(A) \leq \bar{P}(A)\} \quad (3)$$

W ogólnym przypadku $\wp \subset \wp_{\underline{P}, \bar{P}}$. Rozwiązywanie rzeczywistych zagadnień za pomocą modelu przyjętego w takiej postaci jest złożone. W artykule przedstawiono wybrane praktyczne metody wnioskowania w warunkach niepewności subiektywnej.

2.1 Metoda zbiorów losowych [6,7]

Formalnie, zbiór losowy (*random sets*) jest odwzorowaniem z przestrzeni probabilistycznej do zbioru potęgowego $\Gamma = 2^X$. Odwzorowanie to indukuje ograniczenia górne i dolne prawdopodobieństwa na zbiorze X . Dla zbioru ciągłego przestrzeń probabilistyczna jest wyposażona w miarę Labesgue'a, a odwzorowanie jest odwzorowaniem z punktu na przedział.

W przypadku zbioru skończonego, ograniczenie dolne i górne prawdopodobieństwa określane są odpowiednio miarą przekonania (*belief*) oraz miarą możliwości (*plausibility*).

Alternatywną, użyteczną reprezentacją zbiorów losowych jest znormalizowany rozkład dodatnich mas m na zbiorze potęgowym, gdzie:

$$\sum_{E \subseteq X} m(E) = 1 \quad (4)$$

$$m(\emptyset) = 0 \quad (5)$$

gdzie: $E \subseteq A$

Zbiór E , któremu przypisana jest wartość dodatnia masy, określany jest jako „*focal*”. Funkcje przekonania (*belief*) oraz możliwości (*plausibility*) są zdefiniowane następująco:

$$Bel(A) = \sum_{E, E \subseteq A} m(E) \quad (6)$$

$$Pl(A) = 1 - Bel(A^c) = \sum_{E, E \cap A \neq \emptyset} m(E) \quad (7)$$

Zbiór

$$\wp_{Bel} = \{P \mid \forall A \subseteq X, Bel(A) \leq P(A) \leq Pl(A)\} \quad (8)$$

jest rodziną rozkładów prawdopodobieństwa zdefiniowaną za pomocą miary przekonania.

Chociaż $2^{|X|}$ wartości jest niezbędnych do pełnego zdefiniowania uogólnionego zbioru losowego, to fakt, że może on być interpretowany jako rozkłady prawdopodobieństwa na podzbiorach X umożliwia przeprowadzenie symulacji za pomocą procesu próbkowania (*sampling process*).

2.2 Metoda dystrybucji możliwości [5,6]

Dystrybucja możliwości (*possibility distribution*) π jest odwzorowaniem ze zbioru X do przedziału jednostkowego tak, aby $\pi(x) = 1$ dla wybranych $x \in X$. Z formalnego punktu widzenia, dystrybucja możliwości odpowiada funkcji przynależności w teorii zbiorów rozmytych. Dla odwzorowania dystrybucji możliwości π zdefiniowano miarę zdolności (*possibility*):

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x) \quad (9)$$

miarę konieczności (*necessity*):

$$N(A) = 1 - \Pi(A^c) \quad (10)$$

oraz miarę wystarczalności (*sufficiency*):

$$\Delta(A) = \inf_{x \in A} \pi(x) \tag{11}$$

Miara zdolności (*possibility*) określa stopnia możliwości wystąpienia zdarzenia, czyli jest zgodna z możliwym stanem, miara konieczności (*necessity*) określa na ile zdarzenie jest pewne, że wystąpi, a miara wystarczalności (*sufficiency*) określa na ile możliwe są wszystkie zestawy zdarzeń zawierające w sobie dane zdarzenie A .

Miara zdolności (*possibility*) może być interpretowana jako górna granica prawdopodobieństwa. Zbiór:

$$\wp_{\pi} = \{P, \forall A \subseteq X, N(A) \leq P(A) \leq \Pi(A)\} \tag{12}$$

jest rodziną rozkładów prawdopodobieństwa zdefiniowaną za pomocą miary dystrybucji możliwości π .

Z praktycznego punktu widzenia, dystrybucja możliwości jest najprostszą reprezentacją nieprecyzyjnego prawdopodobieństwa.

2.3 Metoda prawdopodobieństwa interwałowego [2,6]

Prawdopodobieństwo interwałowe (*probability interval*) jest zdefiniowane za pomocą ograniczeń dolnego i górnego prawdopodobieństwa dla pojedynczego elementu x_i . Wartości ograniczeń traktowane są jako zbiór interwałów $L = \{[l_i, u_i]\}$, gdzie $i = 1, \dots, n$, definiujących rodzinę rozkładów prawdopodobieństwa:

$$\wp_L = \{P \mid l_i \leq p(x_i) \leq u_i \forall x_i \in X\} \tag{13}$$

Dla danych interwałów L , ograniczenia górne $\bar{P}(A)$ i dolne $\underline{P}(A)$ prawdopodobieństwa są obliczane za pomocą następujących wyrażeń:

$$\underline{P}(A) = \max\left(\sum_{x_i \in A} l_i, 1 - \sum_{x_i \notin A} u_i\right) \tag{14}$$

$$\bar{P}(A) = \min\left(\sum_{x_i \in A} u_i, 1 - \sum_{x_i \notin A} l_i\right) \tag{15}$$

3. TEORIA ZBIORÓW LOSOWYCH W SYNTEZIE WNIOSKOWANIA

Metoda Dempstera-Shafera [6,7] opisana jest za pomocą teorii zbiorów losowych. Przestrzeń w teorii Dempstera-Shafera definiowana jest jako trójka uporządkowana:

$$\langle \Omega, F, m \rangle \tag{16}$$

gdzie: Ω – przestrzeń zdarzeń elementarnych,

F – podzbiór zbioru potęgowego 2^{Ω} ,

m – funkcja alokacji masy zdefiniowana w postaci $m: 2^{\Omega} \rightarrow [0,1]$

Funkcję przekonania (*belief*) zdefiniowano jako:

$$Bel(U) = \sum_{V \subset U} m(V) \quad (17)$$

gdzie: $U, V \in F$

a funkcję możliwości (*plausibility*) jako:

$$Pl(U) = \sum_{V \cap U \neq \emptyset} m(V) \quad (18)$$

Metoda Dempstera-Shafera umożliwia wyznaczanie syntetycznych ocen w postaci łącznych rozkładów masy na podstawie ocen jednostkowych transformowanych według zależności:

$$m^{I \oplus II}(U) = \frac{\sum_{V_1 \cap V_2 = U} m^I(V_1) m^{II}(V_2)}{1 - K} \quad \text{dla } U \neq \emptyset \quad (19)$$

$$m^{I \oplus II}(\emptyset) = 0 \quad (20)$$

gdzie: $K = \sum_{V_1 \cap V_2 = \emptyset} m^I(V_1) m^{II}(V_2)$

Zastosowanie metody Dempstera-Shafera w syntezy wnioskowania przedstawiono na przykładzie ocen trzech niezależnych zdarzeń (W , O oraz Z), z których każdy reprezentowany jest przez czteroelementowy zbiór stanów (a_i , b_i , c_i oraz d_i , gdzie $i = W, O, Z$). Oceny przeprowadzone zostały przez trzech niezależnych ekspertów (I , II oraz III).

Zbiór zdarzeń elementarnych dla zdarzenia W ma postać $\Omega_W = \{a_W, b_W, c_W, d_W\}$, gdzie:

a_W – bardzo mało prawdopodobne,
 b_W – mało prawdopodobne,
 c_W – dość prawdopodobne,
 d_W – bardzo prawdopodobne.

Zbiór zdarzeń elementarnych dla zdarzenia O ma postać $\Omega_O = \{a_O, b_O, c_O, d_O\}$, gdzie:

a_O – dość prawdopodobne,
 b_O – mało prawdopodobne,
 c_O – bardzo mało prawdopodobne,
 d_O – nieprawdopodobne.

Zbiór zdarzeń elementarnych dla zdarzenia Z ma postać $\Omega_Z = \{a_Z, b_Z, c_Z, d_Z\}$, gdzie:

a_Z – słabo odczuwalne,
 b_Z – odczuwalne,
 c_Z – silnie odczuwalne,
 d_Z – krytyczne.

Eksperti oceniający zdarzenia przyjęli funkcje alokacji dla zdarzenia W :

$$m_W^I = \begin{cases} \{a_W\} \rightarrow 0,2 \\ \{a_W, b_W\} \rightarrow 0,5 \\ \{a_W, b_W, c_W\} \rightarrow 0,3 \\ \text{dla pozostałych} \rightarrow 0 \end{cases}, \quad m_W^{II} = \begin{cases} \{a_W, b_W\} \rightarrow 0,1 \\ \{b_W\} \rightarrow 0,4 \\ \{b_W, c_W\} \rightarrow 0,5 \\ \text{dla pozostałych} \rightarrow 0 \end{cases}, \quad m_W^{III} = \begin{cases} \{b_W\} \rightarrow 0,4 \\ \{b_W, c_W, d_W\} \rightarrow 0,2 \\ \{c_W, d_W\} \rightarrow 0,4 \\ \text{dla pozostałych} \rightarrow 0 \end{cases},$$

dla zdarzenia O :

$$m_O^I = \begin{cases} \{a_O\} \rightarrow 0,1 \\ \{a_O, b_O\} \rightarrow 0,2 \\ \{b_O, c_O\} \rightarrow 0,7 \\ \text{dla pozostałych} \rightarrow 0 \end{cases}, \quad m_O^{II} = \begin{cases} \{b_O, c_O, d_O\} \rightarrow 0,2 \\ \{b_O, d_O\} \rightarrow 0,4 \\ \{c_O, d_O\} \rightarrow 0,4 \\ \text{dla pozostałych} \rightarrow 0 \end{cases}, \quad m_O^{III} = \begin{cases} \{b_O, c_O\} \rightarrow 0,3 \\ \{c_O\} \rightarrow 0,3 \\ \{c_O, d_O\} \rightarrow 0,4 \\ \text{dla pozostałych} \rightarrow 0 \end{cases},$$

a dla zdarzenia Z :

$$m_Z^I = \begin{cases} \{a_Z\} \rightarrow 0,2 \\ \{a_Z, b_Z, c_Z\} \rightarrow 0,3 \\ \{b_Z, c_Z, d_Z\} \rightarrow 0,5 \\ \text{dla pozostałych} \rightarrow 0 \end{cases}, \quad m_Z^{II} = \begin{cases} \{a_Z, c_Z, d_Z\} \rightarrow 0,2 \\ \{b_Z, c_Z\} \rightarrow 0,4 \\ \{b_Z, d_Z\} \rightarrow 0,4 \\ \text{dla pozostałych} \rightarrow 0 \end{cases}, \quad m_Z^{III} = \begin{cases} \{a_Z, c_Z\} \rightarrow 0,7 \\ \{a_Z, d_Z\} \rightarrow 0,2 \\ \{b_Z\} \rightarrow 0,1 \\ \text{dla pozostałych} \rightarrow 0 \end{cases}.$$

Wyznaczone wartości funkcji przekonania (*belief*) i możliwości (*plausibility*) dla zdarzenia W przedstawiono w Tab. 1, dla zdarzenia O w Tab. 2 oraz dla zdarzenia Z w Tab. 3.

Tab. 1. Wartości funkcji przekonania (*belief*) i możliwości (*plausibility*) dla zdarzenia W

	I		II		III	
	Bel	Pl	Bel	Pl	Bel	Pl
\emptyset	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\{a_W\}$	0,2	1,0	0,0	0,1	0,0	0,0
$\{b_W\}$	0,0	0,8	0,4	1,0	0,4	0,6
$\{c_W\}$	0,0	0,3	0,0	0,5	0,0	0,6
$\{d_W\}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6
$\{a_W, b_W\}$	0,7	1,0	0,5	0,5	0,4	0,4
$\{a_W, c_W\}$	0,2	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0
$\{a_W, d_W\}$	0,2	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0
$\{b_W, c_W\}$	0,0	0,3	0,9	0,9	0,4	0,6
$\{b_W, d_W\}$	0,0	0,0	0,4	0,4	0,4	0,6
$\{c_W, d_W\}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,4	0,6

Tab. 2. Wartości funkcji przekonania (belief) i możliwości (plausibility) dla zdarzenia O

	I		II		III	
	Bel	Pl	Bel	Pl	Bel	Pl
\emptyset	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\{a_o\}$	0,1	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0
$\{b_o\}$	0,0	0,9	0,0	0,6	0,0	0,3
$\{c_o\}$	0,0	0,7	0,0	0,6	0,3	1,0
$\{d_o\}$	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,4
$\{a_o, b_o\}$	0,3	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0
$\{a_o, c_o\}$	0,1	0,1	0,0	0,0	0,3	0,3
$\{a_o, d_o\}$	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0
$\{b_o, c_o\}$	0,7	0,7	0,0	0,2	0,6	0,6
$\{b_o, d_o\}$	0,0	0,0	0,4	0,6	0,0	0,0
$\{c_o, d_o\}$	0,0	0,0	0,4	0,6	0,7	0,7

Tab. 3. Wartości funkcji przekonania (belief) i możliwości (plausibility) dla zdarzenia Z

	I		II		III	
	Bel	Pl	Bel	Pl	Bel	Pl
\emptyset	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\{a_z\}$	0,2	0,5	0,0	0,2	0,0	0,9
$\{b_z\}$	0,0	0,8	0,0	0,8	0,1	0,1
$\{c_z\}$	0,0	0,8	0,0	0,6	0,0	0,7
$\{d_z\}$	0,0	0,5	0,0	0,6	0,0	0,2
$\{a_z, b_z\}$	0,2	0,5	0,0	0,0	0,1	0,1
$\{a_z, c_z\}$	0,2	0,5	0,0	0,2	0,7	0,7
$\{a_z, d_z\}$	0,2	0,2	0,0	0,2	0,2	0,2
$\{b_z, c_z\}$	0,0	0,8	0,4	0,4	0,1	0,1
$\{b_z, d_z\}$	0,0	0,5	0,4	0,4	0,1	0,1
$\{c_z, d_z\}$	0,0	0,5	0,0	0,2	0,0	0,0

Łączne rozkłady masy wyznaczone zgodnie z regułą Dempstera (6,7) dla zdarzenia W zebrano w Tab.4, dla zdarzenia O zebrano w Tab.5 oraz dla zdarzenia Z zebrano w Tab.6.

Tab. 4. Wartości łącznych rozkładów masy dla zdarzenia W (puste pola wartość 0,00)

	I oraz II	I oraz III	II oraz III	I, II oraz III
\emptyset				
$\{a_w\}$	0,02			
$\{b_w\}$	0,69	0,70	0,62	0,83
$\{c_w\}$		0,20	0,25	0,11
$\{d_w\}$				
$\{a_w, b_w\}$	0,10			
$\{a_w, c_w\}$	0,18			
$\{a_w, d_w\}$				
$\{b_w, c_w\}$		0,10	0,12	0,05
$\{b_w, d_w\}$				
$\{c_w, d_w\}$				

Tab. 5. Wartości łącznych rozkładów masy dla zdarzenia O (puste pola wartość 0,00)

	I oraz II	I oraz III	II oraz III	I, II oraz III
\emptyset				
$\{a_o\}$				
$\{b_o\}$	0,49	0,08	0,14	0,22
$\{c_o\}$	0,34	0,64	0,34	0,7
$\{d_o\}$			0,18	
$\{a_o, b_o\}$				
$\{a_o, c_o\}$				
$\{a_o, d_o\}$				
$\{b_o, c_o\}$	0,17	0,28	0,07	0,08
$\{b_o, d_o\}$				
$\{c_o, d_o\}$			0,27	

Dla zdarzenia W najbardziej wiarygodnym stanem jest stan $\{b_w\}$, dla zdarzenia O stan $\{c_o\}$, a dla zdarzenia Z stan $\{c_z\}$.

Tab. 6. Wartości łącznych rozkładów masy dla zdarzenia Z (puste pola wartość 0,00)

	I oraz II	I oraz III	II oraz III	I, II oraz III
\emptyset				
$\{a_z\}$	0,05	0,24		0,09
$\{b_z\}$	0,14	0,08	0,13	0,13
$\{c_z\}$		0,36	0,45	0,58
$\{d_z\}$		0,10	0,13	0,12
$\{a_z, b_z\}$				
$\{a_z, c_z\}$	0,07	0,20	0,23	0,08
$\{a_z, d_z\}$			0,06	
$\{b_z, c_z\}$	0,38			
$\{b_z, d_z\}$	0,24			
$\{c_z, d_z\}$	0,12			

3. WNIOSKI

W artykule przedstawiono jądro metod formalizacji niepewności subiektywnej, wskazując na możliwości ich zastosowania. Praktyczne wykorzystanie metody Dempstera-Shafera w syntezie wnioskowania na podstawie pojedynczych opinii świadczy o celowości prowadzenia dalszych badań w zakresie wdrożenia metod nieprecyzyjnego prawdopodobieństwa (*imprecise probability*) do praktyki projektowania, do oceny niezawodności oraz w procesie podejmowania decyzji odnośnie bezpieczeństwa i oceny ryzyka.

4. BIBLIOGRAFIA

- [1] Barczak A.: *Szacowanie ryzyka przy niepewnej i niepełnej informacji z wykorzystaniem teorii funkcji przekonania*, XIV Szkoła Analizy Modalnej, Kraków, 2009.
- [2] De Campos L. M.: *Probability intervals: a tool for uncertain reasoning*, International Journal of Uncertainty, Vol. 2, No. 2, 1994.
- [3] Destercke S., Dubois D., Chojnacki E.: *Unifying practical uncertainty representations: I. Generalized p-boxes*, International Journal of Approximate Reasoning, Vol. 49, 2008.
- [4] Ferson S., Joslyn C. A., Helton J. C., Oberkampf W. L., Sents K.: *Summary from epistemic uncertainty workshop: consensus amid diversity*, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 85, 2004.
- [5] Klir G. J.: *On the variety of imprecise probabilities*, Kybernetes, Vol. 30, No. 9/10, 2001.
- [6] Walley P.: *Measures of uncertainty in expert systems*, Artificial Intelligence, Vol. 83, 1996.
- [7] Wierchoń S. T.: *Metody reprezentacji i przetwarzania informacji niepewnej w ramach teorii Dempstera-Shafera*, Instytut Podstaw Informatyki PAN, Warszawa, 1996.