

Magdalena PIASECKA¹
Beata MACIEJEWSKA²

ZASTOSOWANIE METODY WSPÓLCZYNNIKÓW WRAŻLIWOŚCI Z WYKORZYSTANIEM FUNKCJI TREFFTZA W BADANIACH WYMIANY CIEPŁA W MINIKANALE

W referacie przedstawiono sposób określenia współczynnika przejmowania ciepła przy wrzeniu w przepływie płynu chłodniczego przez minikanal prostokątny, ogrzewany asymetrycznie. Lokalne wartości współczynnika przejmowania ciepła wyznaczono dzięki rozwiązaniu dwuwymiarowego zagadnienia odwrotnego przewodnictwa ciepła. Zagadnienie to rozwiązano za pomocą metody Beck'a (metody współczynników wrażliwości) w połączeniu z metodą funkcji Trefftza. Dzięki zastosowaniu metody Beck'a zagadnienie odwrotne rozłożono na dwa zagadnienia proste, a następnie rozwiązania tych zagadnień aproksymowano funkcjami Trefftza. Przedstawiono i przeanalizowano otrzymane wyniki przykładowego eksperymentu, w którym do pomiaru temperatury powierzchni grzejnej wykorzystuje się termografię ciełokrystaliczną.

THE APPLICATION OF SENSITIVITY COEFFICIENT METHOD WITH THE USE OF TREFFTZ FUNCTIONS IN INVESTIGATIONS INTO HEAT TRANSFER IN A MINICHANNEL

The paper presents the method for determination of boiling heat transfer coefficient in cooling liquid flow in a rectangular minichannel with asymmetric heating. Local values of the heat transfer coefficient have been determined following the solution of the two-dimensional reverse heat transfer problem. This problem has been solved with Beck's method (sensitivity coefficients) in combination with Trefftz functions. Thanks to the application of Beck's method, the reverse problem has been decomposed into two simple problems, whose solutions have been approximated with Trefftz functions. The results obtained from a sample experiment have been presented and analysed, the experiment relying on liquid crystal thermography for the measurement of the heating surface temperature.

¹Politechnika Świętokrzyska, Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn, Katedra Mechaniki,
25-314 Kielce, Al. 1000-lecia Państwa Polskiego 7.
Tel.: +48 41 3424320, Fax: +48 41 3448698, E-mail: tmpmj@tu.kielce.pl

²Politechnika Świętokrzyska, Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego, Katedra Matematyki,
25-314 Kielce, Al. 1000-lecia Państwa Polskiego 7.
Tel.: +48 41 3424381, Fax: +48 41 3448698, E-mail: beatam@tu.kielce.pl

SPIS OZNACZEŃ

a, b, c	– współczynniki kombinacji liniowej,
I	– funkcjonał,
J	– liczba naturalna
L	– długość minikanалу, m,
lw	– liczba węzłów w elemencie,
N	– liczba funkcji Trefftza wykorzystanych do aproksymacji,
P	– liczba punktów pomiarowych,
PWP	– początek wrzenia pęcherzykowego,
q	– gęstość strumienia ciepła, W/m^2
q_v	– wydajność wewnętrznego źródła ciepła, W/m^3 ,
T	– temperatura, K,
$\tilde{T}(x, y)$	– aproksymata temperatury, K,
$u(x, y)$	– rozwiązanie szczególne niejednorodnego równania różniczkowego,
$v(x, y)$	– funkcje Trefftza,
x, y	– współrzędne przestrzenne,
Z_j	– współczynniki wrażliwości,

Symbole greckie

Ω	– obszar płaski,
α	– współczynnik przejmowania ciepła, $W/(m^2K)$,
δ	– grubość, m,
λ	– współczynnik przewodzenia ciepła, $W/(mK)$,

Indeksy

c	– płyn chłodniczy,
F	– folia,
G	– szyba,
i, j, k, n	– liczby naturalne,
p	– punkt pomiarowy.

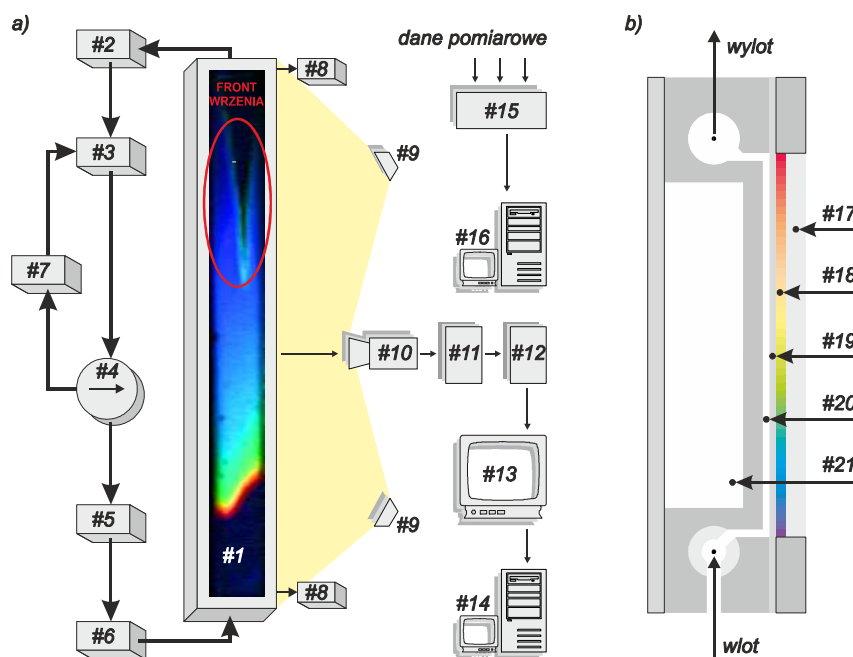
1. WSTĘP

Wrzenie pęcherzykowe charakteryzuje się dużą intensywnością wymiany ciepła, inicjacji wrzenia towarzyszy wzrost współczynnika przejmowania ciepła. Intensyfikacja wymiany ciepła przy wrzeniu wykorzystywana jest w wielu zastosowaniach technicznych, m. in. w mikroelektronice i kompaktowych wymiennikach ciepła. Wymiana ciepła w minikanalach jest coraz szerzej badana i stosowana ze względu na możliwość przetwarzania strumieni ciepła o dużych gęstościach. Wykorzystanie proces wrzenia w minikanalach umożliwia spełnienie przeciwstawnych wymagań, tj. uzyskanie strumieni ciepła o dużych gęstościach przy małej różnicy temperatur między powierzchnią grzejną i cieczą oraz niewielkich wymiarach układu.

2. STANOWISKO EKSPERYMENTALNE

2.1 Moduł pomiarowy

Najważniejszą część stanowiska badawczego (rys.1a) stanowi moduł pomiarowy z minikanalem, przez który przepływa płyn chłodniczy. W module (rys. 1b) znajduje się minikanal prostokątny o zmiennej głębokości (0,7; 1; 1,5 lub 2 mm) i szerokości (20 lub 40 mm), przez który przepływa płyn chłodniczy (FC-72, R 123, R 11). Jedną ze ścian kanału stanowi folia grzejna zasilana prądem stałym o regulowanym natężeniu. Rozkład temperatury na jej powierzchni wyznaczany jest na podstawie rozkładu barwy przy wykorzystaniu termografii ciekłokrystalicznej [5,6]. Kanały pomocnicze w tylnej pokrywie modułu (w tym wodny) umożliwiają regulację temperatury na powierzchni minikanalu, uznawanej za quasiadiabaticzną. Stanowisko badawcze wyposażone jest w odpowiedni system akwizycji i przetwarzania i danych oraz obrazów kolorowych pokazany na rys.1a.



Rys. 1. Schematy: a) układu przepływowego stanowiska oraz systemu akwizycji i przetwarzania danych i obrazów kolorowych, #1-moduł pomiarowy z minikanalem, #2,#6,#7-wymienniki ciepła, #3-zbiornik wyrównawczy, #4-pompa z falownikiem, #5-rotametry, #8-przetworniki ciśnienia, #9-światłowki, #10-kamera wideo CCD, #11-dekompozytor sygnału, #12-magnetowid, #13-monitor, #14-komputer z kartą akwizycji obrazu kolorowego, #15-stacja akwizycji danych pomiarowych, #16-komputer, b) modułu pomiarowego z minikanalem: #17-szkło, #18-ciekłe kryształy, #19-folia grzejna, #20-minikanal, #21-pomocniczy kanał wodny

Ocenę dokładności pomiarów temperatury powierzchni metodą termografii ciekłokrystalicznej przedstawiono w [5]. W każdej serii badań eksperymentalnych zwiększany jest stopniowo strumień ciepła na powierzchni grzejnej poprzez regulację mocy grzejnej doprowadzanej do grzejnika. Celem jest zaobserwowanie tzw. „frontu wrzenia”, świadczącego o inicjacji wrzenia pęcherzykowego w minikanale [7,8].

3. WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA PRZEJMOWANIA CIEPŁA

3.1. Model obliczeniowy z dwuwymiarowym przybliżeniem przepływu ciepła

W dwuwymiarowym przybliżeniu przepływu ciepła przez najważniejsze elementy modułu pomiarowego (rys. 2) występuje zagadnienie proste w przegrodzie szklanej i odwrotne w folii grzejnej [8]. W rozwiązaniu tych zagadnień wykorzystuje się pomiary temperatury w folii na brzegu od strony szkła otrzymane dzięki zastosowaniu termografii ciekłokrystalicznej. Rozwiązując zagadnienie odwrotne (brak warunku brzegowego na brzegu $y = \delta_G + \delta_F$) wyznacza się pole temperatury oraz gęstość strumienia ciepła w folii na brzegu $y = \delta_G + \delta_F$. Lokalne wartości współczynnika przejmowania ciepła wylicza się przy założeniu liniowego rozkładu temperatury płynu przepływającego wzdłuż minikanalu (pomiar temperatury płynu realizowany na wlocie i wylocie do/z minikanalu).

Przyjmuje się, że w folii działa źródło ciepła o stałej wydajności q_V , rozłożone równomiernie w całej jej objętości.

Temperatura przegrody szklanej $T_G(x, y)$ spełnia równanie:

$$\nabla^2 T_G = 0 \quad (1)$$

gdzie $(x, y) \in \Omega_G = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < L, \quad 0 < y < \delta_G\}$,

Temperatura folii grzejnej $T_F(x, y)$ spełnia równanie:

$$\nabla^2 T_F = -\frac{q_V}{\lambda_F} \quad (2)$$

gdzie $(x, y) \in \Omega_F = \{(x, y) \in R^2 : x_1 < x < x_p, \quad \delta_G < y < \delta_G + \delta_F\}$, x_1 - współrzędna pierwszego pomiaru temperatury, x_p - współrzędna ostatniego pomiaru temperatury.

Ponadto dla $y = \delta_G$ i dla $x_1 < x < x_p$ (na styku folia - szkło) przyjęte zostały warunki:

$$T_F(x_p, \delta_G) = T_G(x_p, \delta_G) = T_p \text{ dla } p = 1, 2, \dots, P \quad (3a)$$

$$T_F(x, \delta_G) = T_G(x, \delta_G) \quad (3b)$$

$$-\lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y} = -\lambda_G \frac{\partial T_G}{\partial y} \quad (4)$$

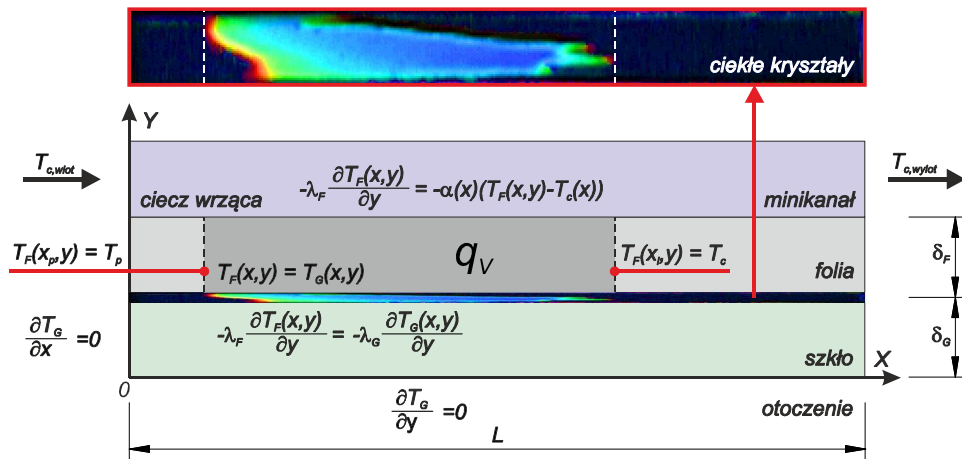
Warunki na pozostałych brzegach:

$$\frac{\partial T_G}{\partial y} = 0 \text{ dla } y = 0 \text{ i } 0 < x < L \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_G}{\partial x} = 0 \text{ dla } x=0 \text{ i } x=L \text{ oraz } 0 < y < \delta_G \quad (6)$$

$$T_F(x, y) = T_1 \text{ dla } \delta_G < y < \delta_G + \delta_F \quad (7)$$

$$T_F(x_p, y) = T_p \text{ dla } \delta_G < y < \delta_G + \delta_F \quad (8)$$



Rys. 2. Warunki brzegowe dla dwuwymiarowego przybliżenia przepływu ciepła przez główne elementy modułu pomiarowego

Postawione zagadnienie rozwiązywane jest za pomocą funkcji Trefftza (T -funkcji) [2], które ściśle spełniają równanie Laplace'a (1).

W celu wyznaczenia wartości współczynnika przejmowania ciepła na brzegu $y = \delta_G + \delta_F$ wylicza się najpierw temperaturę przegrody szklanej $T_G(x, y)$ z rozwiązania zagadnienia prostego, a następnie temperaturę folii $T_F(x, y)$ z rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Znajomość rozkładu temperatury folii pozwala wyznaczyć lokalne wartości współczynnika przejmowania ciepła na styku folia grzejna - płyn w minikanale z warunku:

$$-\lambda_F \frac{\partial T_F(x, \delta_G + \delta_F)}{\partial y} = \alpha(x)(T_F(x, \delta_G + \delta_F) - T_c(x)) \quad (9)$$

gdzie α jest poszukiwanym współczynnikiem przejmowania ciepła, zaś $T_c(x)$ temperaturą płynu, przybliżaną liniowo na całej długości minikanalu.

3.2 Wyznaczenie temperatury przegrody szklanej metodą funkcji Trefftza

Temperatura przegrody szklanej $T_G(x, y)$ w całym obszarze Ω_G aproksymowana jest kombinacją liniową funkcji Trefftza:

$$T_G(x, y) \approx \tilde{T}_G(x, y) = \sum_{i=1}^N a_i v_i(x, y) \quad (10)$$

Nieznane współczynniki a_i we wzorze (10) wyznacza się minimalizując funkcjonal I_G

$$I_G = \int_0^{\delta_G} \left(\frac{\partial \tilde{T}_G}{\partial x}(0, y) \right)^2 dy + \int_0^{\delta_G} \left(\frac{\partial \tilde{T}_G}{\partial x}(L, y) \right)^2 dy + \int_0^L \left(\frac{\partial \tilde{T}_G}{\partial y}(x, 0) \right)^2 dx + \sum_{p=1}^P (\tilde{T}_G(x_p, \delta_G) - T_p)^2 \quad (11)$$

3.3. Wyznaczenie temperatury folii metodą współczynników wrażliwości

Pole temperatury $T_F(x, y)$ zależy w sposób ciągły od gęstości strumienia ciepła q na powierzchni, a zatem zależy także od gęstości strumienia ciepła na brzegu $y = \delta_G + \delta_F$. Brzeg $y = \delta_G + \delta_F$ dla $x_1 \leq x \leq x_p$ dzieli się na J równych części. W każdym przedziale przyjmuje się inny stały strumień q_j . Funkcję temperatury zależną od strumieni q_j dla $j = 1, 2, \dots, J$ rozwija się w szereg Taylora względem strumienia $q_j^* = 0$ i pomija się wyrazy od drugiej pochodnej włącznie.

$$T_F(x, y, q_1, \dots, q_J) \approx T_F(x, y, q_1^*, \dots, q_J^*) + \sum_{j=1}^J \frac{\partial T_F}{\partial q_j}(q_j - q_j^*) \quad (12)$$

Oznaczając $T_F^*(x, y) = T_F(x, y, q_1^*, \dots, q_J^*)$ i $Z_j(x, y) = \frac{\partial T_F}{\partial q_j}$ dla $q_j^* = 0$ otrzymuje się:

$$T_F(x, y, q_1, \dots, q_J) \approx T_F^*(x, y) + \sum_{j=1}^J Z_j(x, y) q_j \quad (13)$$

gdzie $Z_j(x, y)$ to współczynniki wrażliwości [1, 4].

Dla wyznaczenia $T_F^*(x, y)$ oraz $Z_j(x, y)$ w obszarze Ω_F rozwiązuje się następujące zagadnienia wynikające z podstawienia związku (13) do równania (2) i warunków (3b), (4), (7), (8):

$$\nabla^2 T_F^* = -\frac{q_V}{\lambda_F} \quad (14)$$

$$T_F^*(x_1, y) = T_1 \quad (15)$$

$$T_F^*(x_p, y) = T_p \quad (16)$$

$$-\lambda_F \frac{\partial T_F^*}{\partial y}(x, \delta_G) = -\lambda_G \frac{\partial T_G}{\partial y}(x, \delta_G) \quad (17)$$

$$T_F^*(x, \delta_G) = T_G(x, \delta_G) \quad (18)$$

Pomiary temperatury w punktach uwzględnia się w dalszej części obliczeń.

$$\nabla^2 Z_j = 0 \quad (19)$$

$$Z_j(x_1, y) = 0 \quad (20)$$

$$Z_j(x_p, y) = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial Z_j}{\partial y}(x, \delta_G) = 0 \quad (22)$$

$$Z_j(x, \delta_G) = 0 \quad (23)$$

$$-\lambda_F \frac{\partial Z_j}{\partial y}(x, \delta_G + \delta_F) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in < x_1, x_1 + \frac{j-1}{J}(x_p - x_1) \\ 1 & \text{dla } x \in < x_1 + \frac{j-1}{J}(x_p - x_1), x_1 + \frac{j}{J}(x_p - x_1) > \\ 0 & \text{dla } x \in (x_1 + \frac{j}{J}(x_p - x_1), x_p > \end{cases} \quad (24)$$

Rozwiązań przybliżonych tak postawionych zagadnień poszukuje się w postaci:

$$T_F^*(x, y) \approx \tilde{T}_F^*(x, y) = \sum_{k=1}^N b_k v_k(x, y) - \frac{q_v y^2}{2\lambda_F} \quad (25)$$

$$Z_j(x, y) \approx \tilde{Z}_j(x, y) = \sum_{k=1}^N c_k^j v_k(x, y) \quad (26)$$

gdzie $v_k(x, y)$ funkcje Trefftza, b_k , c_k^j współczynniki kombinacji liniowej, które wyznacza się minimalizując odpowiednie funkcjonały I_F^T , $I_F^{Z_j}$

$$I_F^T = \int_{\delta_0}^{\delta_0 + \delta_F} (\tilde{T}_F^*(x_1, y) - T_1)^2 dy + \int_{\delta_0}^{\delta_0 + \delta_F} (\tilde{T}_F^*(x_p, y) - T_p)^2 dy + \int_{x_1}^{x_p} (\lambda_F \frac{\partial \tilde{T}_F^*}{\partial y}(x, \delta_G) - \lambda_G \frac{\partial \tilde{T}_G}{\partial y}(x, \delta_G))^2 dx + \int_{x_1}^{x_p} (T_F^*(x, \delta_G) - T_G(x, \delta_G))^2 dx \quad (27)$$

$$I_F^{Z_j} = \int_{\delta_0}^{\delta_0 + \delta_F} (\tilde{Z}_j(x_1, y))^2 dy + \int_{\delta_0}^{\delta_0 + \delta_F} (\tilde{Z}_j(x_p, y))^2 dy + \int_{x_1}^{x_p} (\frac{\partial \tilde{Z}_j}{\partial y}(x, \delta_G))^2 dx + \int_{x_1}^{x_p} (\tilde{Z}_j(x, \delta_G))^2 dx + \int_{x_1}^{x_1 + \frac{j-1}{J}(x_p - x_1)} (\frac{\partial \tilde{Z}_j}{\partial y}(x, \delta_G + \delta_F))^2 dx + \int_{x_1 + \frac{j-1}{J}(x_p - x_1)}^{x_1 + \frac{j}{J}(x_p - x_1)} (\frac{\partial \tilde{Z}_j}{\partial y}(x, \delta_G + \delta_F) + \frac{1}{\lambda_F})^2 dx + \int_{x_1 + \frac{j}{J}(x_p - x_1)}^{x_p} (\frac{\partial \tilde{Z}_j}{\partial y}(x, \delta_G + \delta_F))^2 dx \quad (28)$$

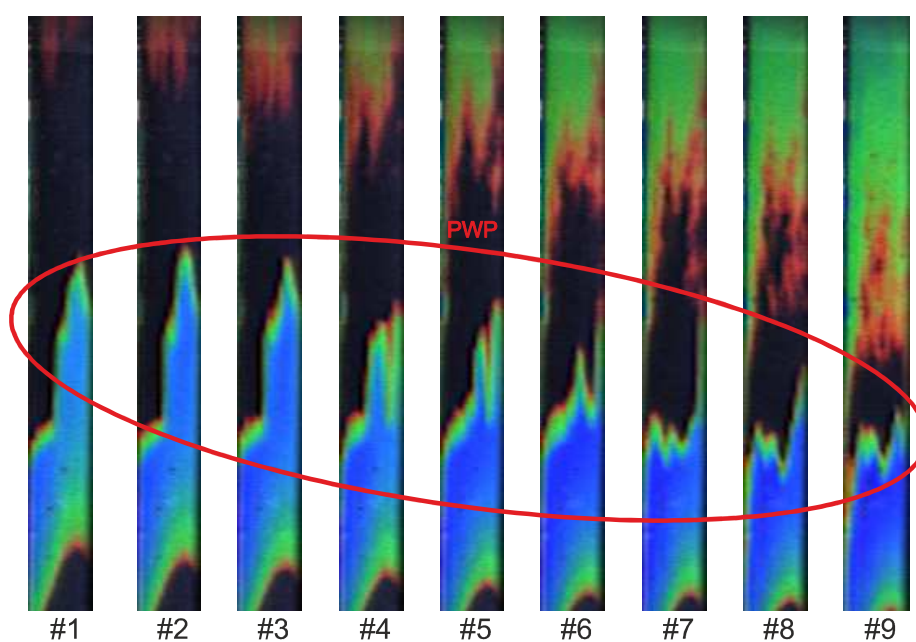
W formule (13) do wyznaczenia pozostały jeszcze wartości q_j .

Wartości q_j oblicza się w wyniku minimalizacji funkcjonału I_F^P dopasowania funkcji $T_F(x, y, q_1, \dots, q_J)$ opisanej wzorem (13) do pomiarów temperatury T_p dla $p = 1, 2, \dots, P$.

$$I_F^P = \sum_{p=1}^P (T_F(x_p, y_p, q_1, \dots, q_J) - T_p)^2 \quad (29)$$

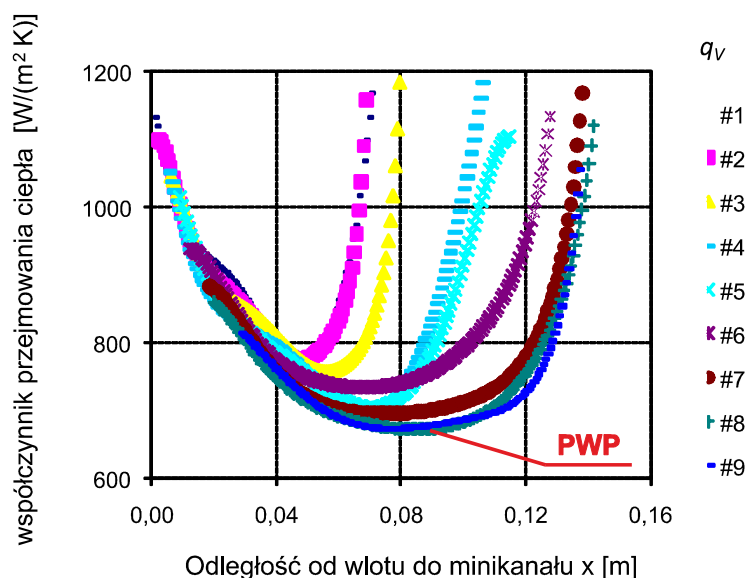
4. WYNIKI

Na rys.3 pokazano obrazy folii grzejnej z ciekłymi kryształami z widocznym „frontem wrzenia”, zarejestrowane przy zwiększaniu strumienia ciepła dostarczanego do powierzchni grzejnej. Front wrzenia rozpoznawany jest jako gwałtowne zmiany barwy na folii grzejnej, występujące zgodnie z kierunkiem przepływu płynu w minikanale, świadczące o nagłym spadku temperatury powierzchni grzejnej. Wówczas w kanale występuje zjawisko histerezy nukleacji, towarzyszące inicjacji wrzenia pęcherzykowego (PWP) [7,8].



Rys.3. Obrazy rozkładu temperatury folii grzejnej przy danych eksperymentalnych: minikanal pionowy, głębokość kanału 0,001; ciecz wrząca R 123; prędkość przepływu cieczy 0,15 m/s; gęstość strumienia masy 220 kg/(m²s); ciśnienie na wlocie do kanału ok. 3,4 bar; $q_v = 2,5 \cdot 10^5 \div 3,7 \cdot 10^5$ kW/m³ (nastawy #1 ÷ #9)

Na rys. 4 pokazano odpowiadające wspomnianym zmianom temperatury powierzchni grzejnej wartości lokalnego współczynnika przejmowania ciepła otrzymane metodą współczynników wrażliwości z wykorzystaniem funkcji Trefftza.



Rys. 4. Współczynnik przyjmowania ciepła w funkcji odległości od wlotu do minikanalu otrzymany metodą współczynników wrażliwości z wykorzystaniem funkcji Trefftza, dane eksperymentalne jak dla rys. 3

Do aproksymacji temperatury przegrody szklanej i folii grzejnej wykorzystano

szesnaście T-funkcji określonych wzorami: $v_n(x, y) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k x^{n-2k} y^{2k}}{(2k)!(n-2k)!}$, $n = 0, 1, \dots, 7$,

$v_m(x, y) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k x^{m-2k-1} y^{2k+1}}{(2k+1)!(m-2k-1)!}$, $m = 1, 2, \dots, 8$.

5. WNIOSKI

Zastosowanie metody współczynników wrażliwości z wykorzystaniem funkcji Trefftza pozwoliło na wyznaczenie lokalnych współczynników przyjmowania ciepła dzięki rozwiązaniu dwuwymiarowego zagadnienia odwrotnego przewodnictwa ciepła. Zastosowanie wspomnianej metody pozwoliło na rozłożenie zagadnienia odwrotnego na dwa zagadnienia proste, a następnie rozwiązania tych zagadnień aproksymowano funkcjami Trefftza. Wyznaczone aproksymaty temperatury przegrody szklanej i folii grzejnej ściśle spełniają odpowiednie równania różniczkowe, a w sposób przybliżony spełniają warunki brzegowe.

Analizując otrzymane zależności lokalnego współczynnika przejmowania ciepła w funkcji odległości od wlotu do minikanalu można zauważyć, że przy inicjacji wrzenia w minikanale dochodzi do znacznej intensyfikacji procesu wymiany ciepła, obserwowanej jako skokowy wzrost wartości współczynnika przejmowania ciepła. Dzięki zastosowaniu termografii ciekłokrystalicznej w badaniach eksperymentalnych inicjację wrzenia zaobserwowano jako „front wrzenia”, przesuwany się w kierunku przeciwnym do kierunku przepływu, przy wzroście strumienia ciepła.

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2009-2012 jako projekt badawczy MNiSW nr N N512 354037

6. BIBLIOGRAFIA

- [1]. Beck J.V., Blackwell B., St. Clair Jr.C.R.: *Inverse Heat Conduction-Ill-Posed Problems*, Wiley – Interscience Publ., New York, 1985.
- [2]. Ciałkowski M., Frackowiak A.: *Funkcje cieplne i ich zastosowanie do rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła i mechaniki*, WPP, Poznań 2000.
- [3]. Hożejowska S, Piasecka M.: *Wyładzanie danych pomiarowych funkcjami Trefftza przy wyznaczaniu współczynnika przejmowania ciepła*, w tymże.
- [4]. Kruk., Sokała M.: *Sensitivity coefficients and heat polynomials in the inverse heat conduction problems*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics ZAMM, vol.80, Supplement 3, pp.693-694, 2000.
- [5]. Piasecka M.: *Oszacowanie dokładności pomiaru temperatury powierzchni w termografii ciekłokrystalicznej*, w tymże.
- [6]. Piasecka M.: *Wykorzystanie termografii ciekłokrystalicznej do detekcji pola temperatury w badaniach wymiany ciepła podczas przepływu płynu chłodniczego w minikanale*, Logistyka nr 6/2009, CD.
- [7]. Piasecka M.: *Wyniki badań wymiany ciepła podczas przepływu płynu chłodniczego w minikanale*, Logistyka nr 6/2009, CD.
- [8]. Piasecka M., Hożejowska S., Poniewski M. E.: *Experimental evaluation of flow boiling incipience of subcooled fluid in a narrow channel*, Int. J. of Heat and Fluid Flow, vol. 25, pp.159-172, 2004.