

Artur KIERZKOWSKI<sup>1</sup>

### **MODELOWANIE LICZBY PASAŻERÓW LOTNICZYCH Z WYKORZYSTANIEM TEORII SZEREGÓW CZASOWYCH**

*Artykuł omawia wybrane zagadnienia modelowania szeregów czasowych. W artykule podany został schemat analizowania oraz modelowania szeregu czasowego, wskazane zostały techniki estymacji składowej trendu oraz sezonowości. Zaprezentowany został przykład analizy oraz modelowania liczby pasażerów lotniczych. Wskazane zostały możliwości dalszej prac badawczych nad rozpatrywanym problemem.*

### **MODELING THE NUMBER OF AIR PASSENGERS USING TIME SERIES THEORY**

*In his paper we introduce some basic idea of time series analysis and stochastic processes. Of particular importance are the concepts of stationary and the autocovariance and sample autocovariance functions. Some standard techniques are described for the estimation and removal of trend and seasonality from an observed time series. In his paper presents some modeling and analysis the number of air passengers using time series theory.*

## **1. WSTĘP**

Możliwość prognozowania procesów transportowych jest zagadnieniem niezwykle istotnym. Posiadając odpowiednie modele możliwe jest prognozowanie wielu procesów jak np: liczby pasażerów, czasu opóźnienia, czasu obsługi itp. W tym celu wykorzystuje się odpowiednie modele lub dla danych historycznych modeluje się rozkłady gęstości prawdopodobieństwa. Operacja taka posiada jednak pewne wady, ponieważ nie uwzględnia trendu oraz sezonowości rozpatrywanego procesu. Dlatego też rozpatrywany problem lepiej opisywany jest poprzez zastosowanie teorii szeregów czasowych.

Publikacje dotyczące wyżej wspomnianego zagadnienia dotyczą szczególnie istotnego zjawiska a więc modelowania potoków ruchu. W [1] przedstawiony został model szeregu czasowego połączeń lotniczych w porcie regionalnym. Uwzględniona została składowa trendu oraz sezonowości jako zjawiska istotne dla transportu lotniczego. Podobnie w [2]

---

<sup>1</sup>Politechnika Wroclawska Wydział Mechaniczny, Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn, Zakład Logistyki i Systemów Transportowych, Ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Polska, e-mail: artur.kierzkowski@pwr.wroc.pl.

wskazane zostały istotne procedury postępowania w przypadku analizy liczby pasażerów z uwzględnieniem krótkiego oraz długiego horyzontu czasowego.

## 2. PROCEDURA ANALIZOWANIA SZEREGU CZASOWEGO

Wśród wielu modeli szeregów czasowych najczęściej spotykane są następujące trzy modele:

$$X_t = m_t + s_t + e_t$$

$$X_t = m_t \cdot s_t \cdot e_t$$

$$X_t = m_t \cdot s_t + e_t$$

gdzie  $m_t, s_t, e_t$  mają następującą interpretację:

$m_t$  – składowa trendu (deterministyczna funkcja trendu)

$s_t$  – składowa sezonowości (deterministyczna funkcja sezonowości)

$e_t$  – błąd losowy (proces stacjonarny o średniej zero)

Pierwszy model nazywa się modelem addytywnym, drugi multiplikatywnym, natomiast trzeci modelem mieszanym. Poprzez wybór odpowiedniej transformacji (transformacja Boxa-Coxa) model multiplikatywny i mieszany można sprowadzić do modelu addytywnego. W wielu modelach funkcja trendu i sezonowości ma okres długości jednego roku. Spowodowane jest to zachowaniem się sytuacji gospodarczej na przestrzeni czasu.

Procedura analizy i dopasowania jednowymiarowego szeregu czasowego składa się z następujących kroków:

1. Na podstawie wykresu szeregu czasowego dokonuje się jego klasyfikacji (czy jest addytywny czy multiplikatywny). Jeśli jest multiplikatywny sprowadza się go do postaci addytywnej, jeśli jest addytywny pozostawia się bez zmian. Ponadto przeprowadza się wizualną analizę wykresu szeregu czasowego pod kątem istnienia funkcji trendu i funkcji sezonowej oraz ich ogólnej charakterystyki.
2. W modelu addytywnym (oryginalny lub przetransformowany) dokonuje się estymacji funkcji trendu  $\hat{m}_t$  i funkcji sezonowej  $\hat{s}_t$  (jeżeli istnieją) metodą przedstawioną w [3], rozdział 1.5. Ewentualnie składowe te usuwa się metodą różnicowania. Metoda różnicowania ma na celu usunięcie trendu i sezonowości. Po estymacji tych funkcji tworzy się proces  $\hat{e}_t = e_t - \hat{m}_t - \hat{s}_t$ . Proces ten nazywamy procesem residuów. Jeżeli wykona się właściwej estymacje  $\hat{m}_t, \hat{s}_t$ , to proces  $\hat{e}_t$  jest stacjonarny.
3. Mając proces residuów testuje się czy jest on ciągiem niezależnych jednakowo rozłożonych zmiennych losowych (IID – szumem), metodami zawartymi w rozdziale 1.6 [3]. Jeżeli nie odrzuca się hipotezy zerowej, tzn. że proces

residuów jest ciągiem niezależnych jednakowo rozłożonych zmiennych losowych (IID- szumem), to przyjmuje się, że estymowany proces ma postać  $\hat{X}_t = \hat{m}_t + \hat{s}_t + \hat{e}_t$ , gdzie  $\{\hat{e}_t\}$  jest IID – szumem. Należy jeszcze wyznaczyć jego wariancję, co robi program ITSM 2000.

4. Jeżeli proces residuów nie pochodzi z IID – szumu to dopasowuje się do niego proces stacjonarny typu AR(p) – autokorelacji rzędu p, lub proces MA(q) – średniej ruchomej rzędu q, lub proces ARMA(p,q) – proces mieszany autokorelacji i średniej ruchomej rzędu p i q odpowiednio. Metoda dopasowania tych procesów do danych jest opisana w rozdziale 5 [3] lub [4]. Metoda dopasowania procesu do danych jest wielostopniowa. Końcowym etapem jest dopasowanie procesu do danych metodą największej wiarygodności. Jakość dopasowania procesu charakteryzowana jest przez wiele wskaźników. Jednym z nich jest wskaźnik AICC (rozdział 5.5. [3]). Im mniejszy jest ten wskaźnik tym lepszy jest stopień dopasowania procesu do danych.
5. Po dopasowaniu procesu do danych ponownie dokonuje się testowania residuów zgodnie z metodami zawartymi w rozdziale 1.6 [3]. Jeżeli proces residuów nie pochodzi z białego szumu, to znaczy że źle zostały wyestymowane  $\hat{m}_t$ ,  $\hat{s}_t$  lub niepoprawnie został dobrany jeden z procesów AR(p), MA(q), ARMA (p,q). Wtedy procedurę dopasowania szeregu czasowego należy powtórzyć.

Procedura ta umożliwia dopasować do szeregu czasowego proces stacjonarny.

Mając wielowymiarowy szereg czasowy stacjonarny możemy do niego dopasować jeden z modeli wielowymiarowego szeregu czasowego AR(p), MA(q), ARMA (p,q) zgodnie z procedurą opisaną w rozdziale 7.6. [3].

Algorytm postępowania w przypadku badania niezależności dwóch szeregów czasowych został przedstawiony w podrozdziale 7.3.3 [3].

## 2. MODELOWANIE PROCESU LICZBY PASAŻERÓW

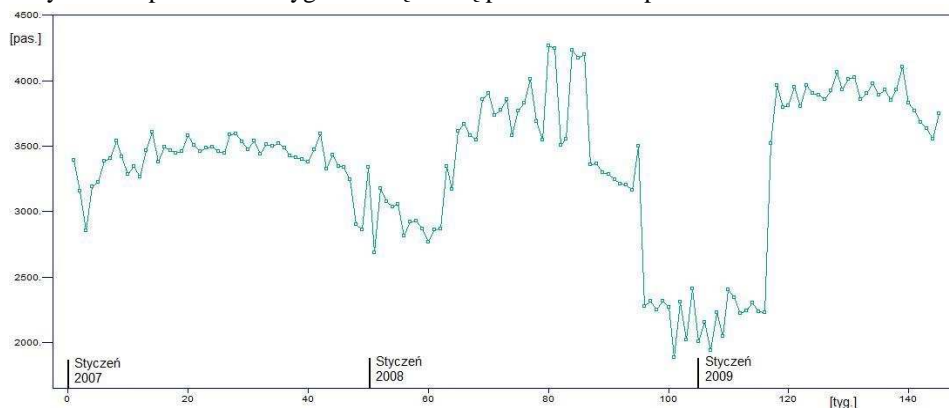
Zagadnienie modelowania liczby pasażerów jest zagadnieniem interesującym ponieważ umożliwia prognozowanie zmian liczby pasażerów na przestrzeni czasu. Zjawisko to jest warte rozważenia również dlatego, iż wiele portów lotniczych boryka się z problemami wykorzystania przepustowości w krótkich okresach czasu. W innych zaś okresach pojawiają się duże zapasy. Takie zjawiska są wyraźnie widoczne w portach turystycznych, w których zaznacza się wzrost liczby pasażerów w okresie letnim natomiast spadek w sezonie zimowym. Obserwacje taką można również zauważyć na podstawie zmian siatki połączeń w sezonie zimowym.

Estymacja parametrów modelu szeregu czasowego umożliwia analizę oraz możliwość prognozowania liczby pasażerów w zbliżającym się okresie eksploatacji portu lotniczego. Analizy takie mogą być podstawą do podjęcia decyzji przez władze portu lotniczego o rozbudowie lotniska w przypadku istnienia trendu rosnącego. W przypadku trendu malejącego warto zastanowić się nad jego przyczyną i ewentualnie dokonać zmian mających odwrócić niekorzystną sytuację. Istnienie sezonowości pozwala także

wprowadzać pewne zmiany w funkcjonowaniu portu lotniczego w różnych okresach sezonu.

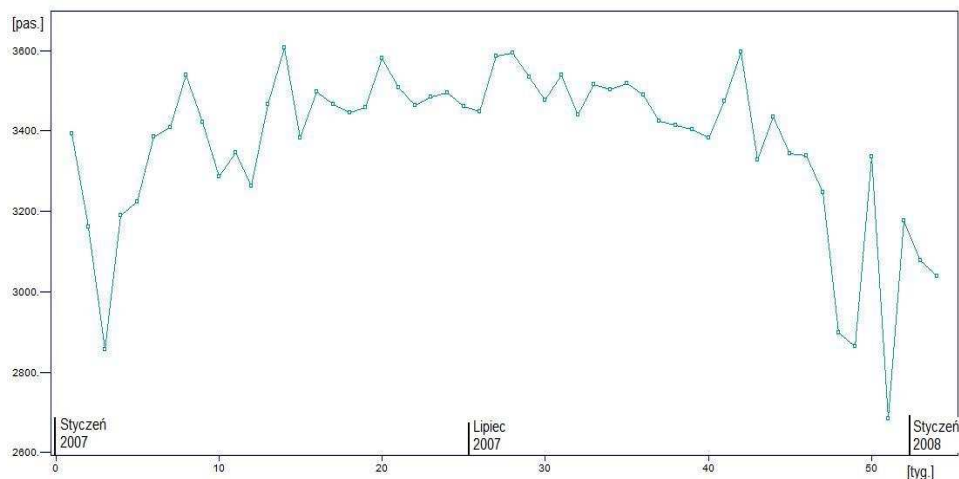
## 2.1 Modelowanie jednowymiarowego szeregu czasowego

Rysunek 1 przedstawia tygodniową liczbę pasażerów dla przewoźnika A.



Rys. 1. Tygodniowa liczba pasażerów przewoźnika A.

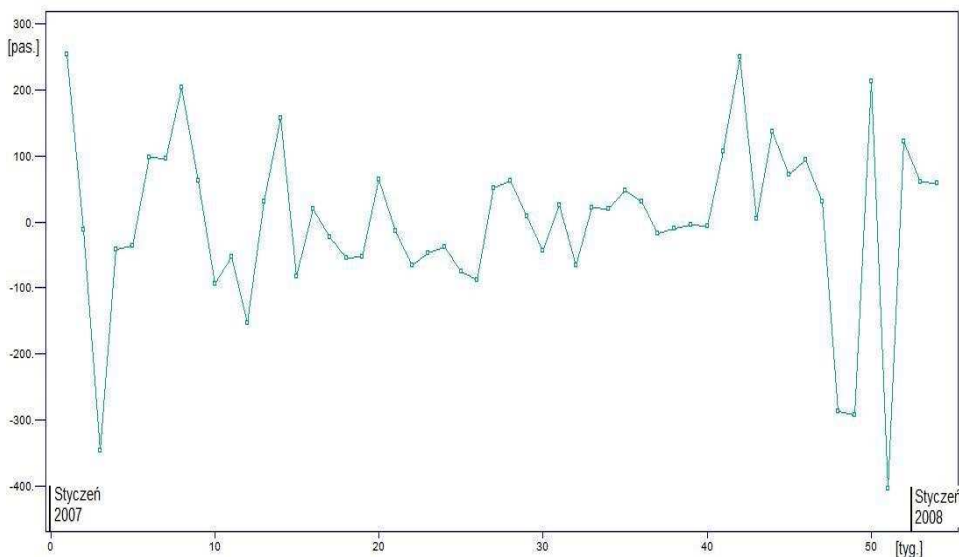
Warto zwrócić uwagę, że w pierwszym okresie wykonywania połączeń na trasie Port A – Port B – Port A (styczeń 2007 – styczeń 2008) liczba przewiezionych pasażerów ma małą zmienność. Trend jest słabo zauważalny, funkcja sezonowa jest mało wyraźna. Jednakże nie sposób zaprzeczyć, że funkcje te istnieją. Dopiero od 56 tygodnia widoczne jest występowanie funkcji sezonowej. Przyczyną takiej sytuacji może być wprowadzenie połączenia lotniczego na tej samej trasie przez drugiego przewoźnika. W początkowym okresie od 1 do 56 tygodnia przewoźnik A wykonywał 10 połączeń, natomiast w dalszym okresie eksploatacji już 12 połączeń co może tłumaczyć wyraźny wzrost liczby pasażerów po 56 tygodniu. Spadek liczby pasażerów ok. 90 tygodnia spowodowany był istnieniem funkcji sezonowej jak również ogólnosiwiatowym kryzysem gospodarczym, który skutkowało większym spadkiem liczby pasażerów w odniesieniu do analogicznego okresu roku poprzedniego. Szereg taki należy więc analizować w dwóch okresach. Mianowicie w pierwszych 56 tygodniach, oraz pozostałym okresie (od lutego 2008 do września 2009). Rysunek 2 przedstawia liczbę pasażerów przewiezionych przez przewoźnika A do 56 tygodnia.



Rys. 2. Tygodniowa liczba pasażerów przewoźnika A w pierwszych 56 tygodniach.

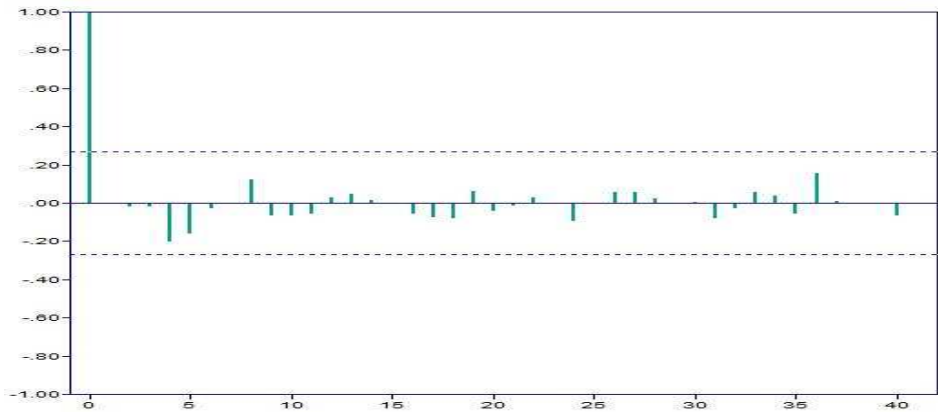
Stosując metodę klasyczną dopasowania procesu do danych poprzez szacowanie funkcji trendu przy braku funkcji sezonowej, otrzymuje się estymowaną funkcję trendu w postaci:  $\hat{m}_t = -0,67326t^2 + 33,985t + 3106$ . Została ona wyznaczona zgodnie z procedurami przedstawionymi w rozdziale 1.5 [1] przy zastosowaniu pakietu ITSM 2000.

Rysunek 3 przedstawia proces  $X_t^{(1)} = m_t - \hat{m}_t + e_t$



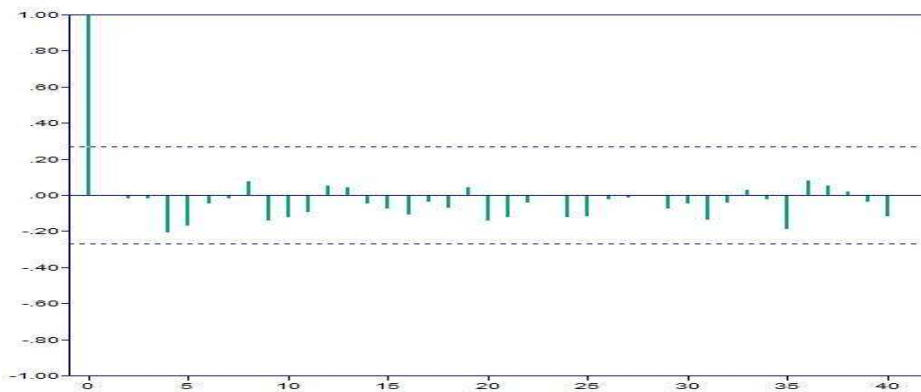
Rys. 3. Proces liczby przewiezionych pasażerów przewoźnika A z usuniętym trendem.

Próbkowa funkcja autokorelacji dla procesu  $\{X_t^{(1)}\}$  jest przedstawiona na rysunku 4.



Rys. 4. Próbkowa funkcja autokorelacji dla procesu  $\{X_t^{(1)}\}$ .

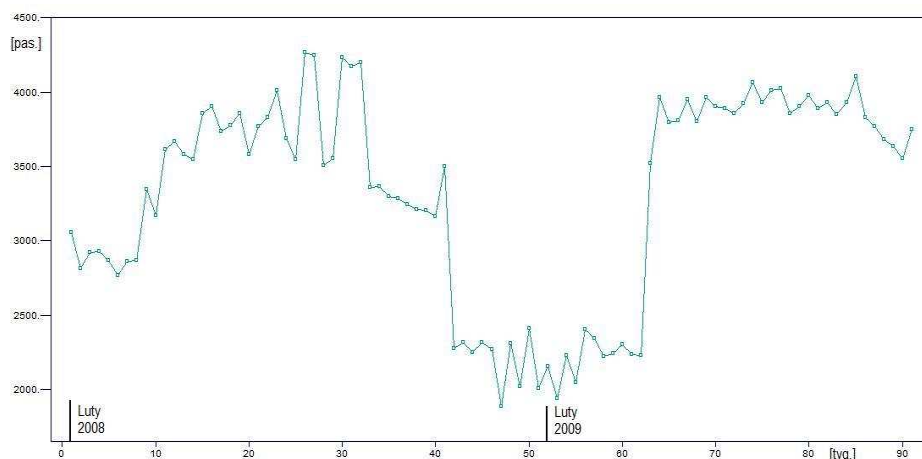
Próbkowa funkcja autokorelacji cząstkowej dla procesu  $\{X_t^{(1)}\}$  jest przedstawiona na rysunku 5.



Rys. 5. Próbkowa funkcja autokorelacji cząstkowej procesu  $\{X_t^{(1)}\}$ .

Postać próbkowej funkcji autokorelacji i próbkowej autokorelacji cząstkowej sugeruje model postaci  $X_t = \hat{m}_t + e_t$ , gdzie  $\{\hat{e}_t\}$  jest IID szumem. Dla zweryfikowania tej hipotezy stosujemy operację testowania residuów przez 6 testów. Wszystkie one wskazują, że nie można odrzucić hipotezy że  $\{\hat{e}_t\}$  jest IID szumem. Zatem, stosowana metoda pokazuje, że estymowany proces ma postać  $\hat{X}_t = \hat{m}_t + \hat{e}_t$ . Wartość statystyki dla testu Ljunga Boxa (procedura testowania niezależności testem Ljunga Boxa została przedstawiona w 1.6.b) wynosi  $Q_{LB} = 8,25$ , natomiast prawdopodobieństwo że jest to ciąg niezależnych zmiennych losowych wynosi 0,99007. Składowe procesu zostały więc poprawnie wyestymowane.

Podobną operację należy przeprowadzić dla szeregu czasowego w którym funkcjonują dwaj przewoźnicy. W szeregu tym zauważyć należy wyraźną sezonowość (rysunek 6)

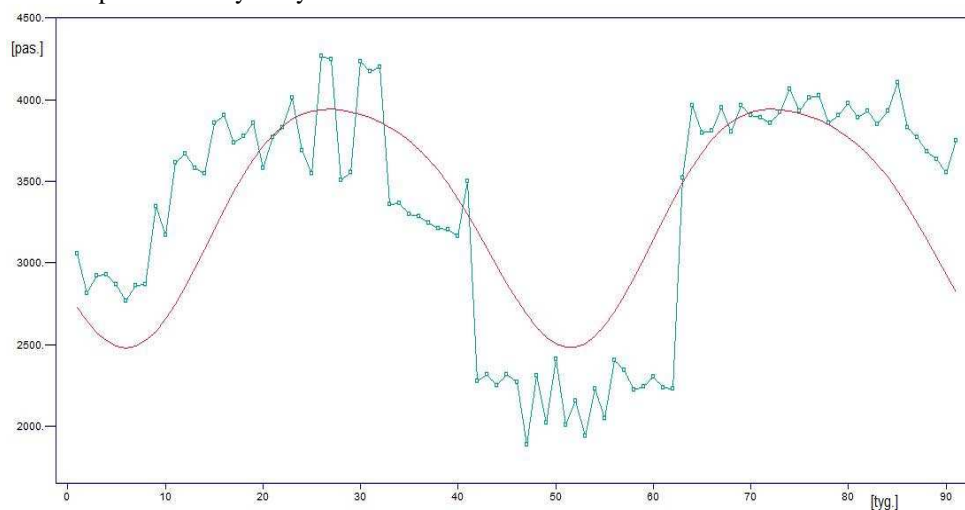


Rys. 6. Liczba pasażerów w poszczególnych tygodniach przewoźnika A w momencie funkcjonowania dwóch przewoźników.

Stosując Metodę klasyczną dopasowania procesu do danych poprzez szacowanie funkcji trendu oraz funkcji sezonowej otrzymuje się estymowaną funkcję trendu w postaci:

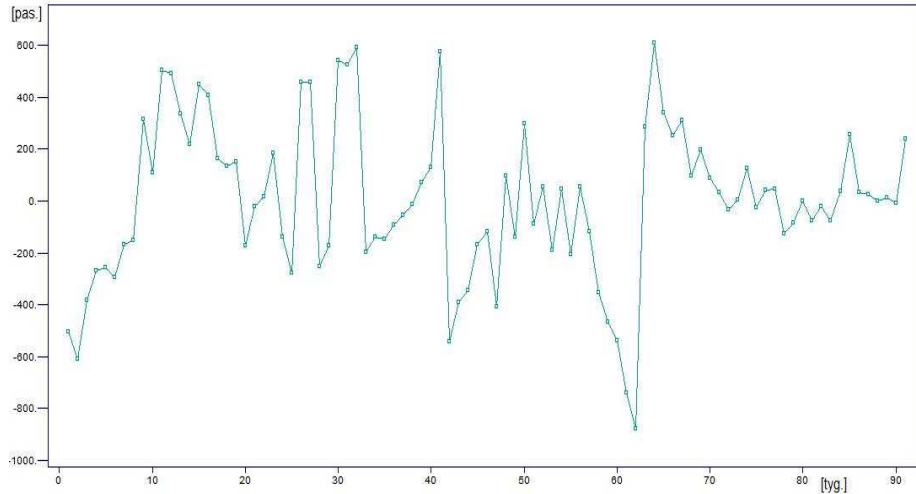
$$\hat{m}_t = 0,56804t^2 - 53,914t + 886,12.$$

Dopasowana została również funkcja harmoniczna, której wykres wraz ze składową trendu został zaprezentowany na rysunku 7.



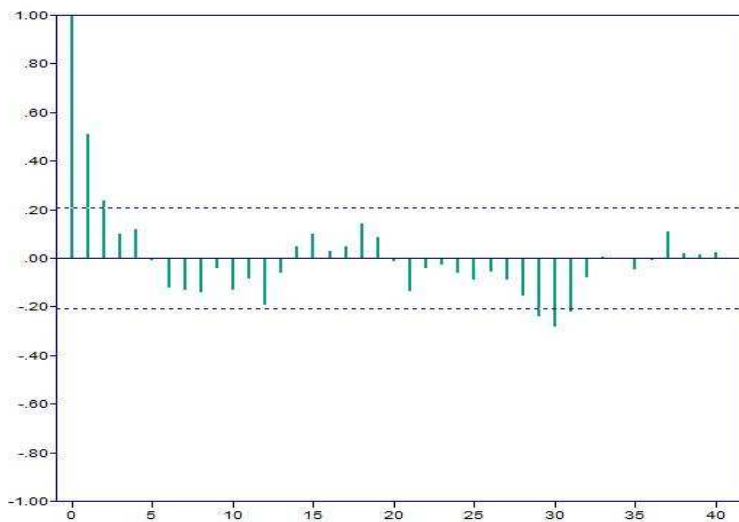
Rys. 7. Wyestymowana funkcja sezonowości.

Proces  $X_t^{(1)} = m_t - \hat{m}_t + s_t - \hat{s}_t + e_t$  został przedstawiony na rysunku 8.



Rys. 8. Residua procesu  $X_t^{(1)} = m_t - \hat{m}_t + s_t - \hat{s}_t + e_t$ .

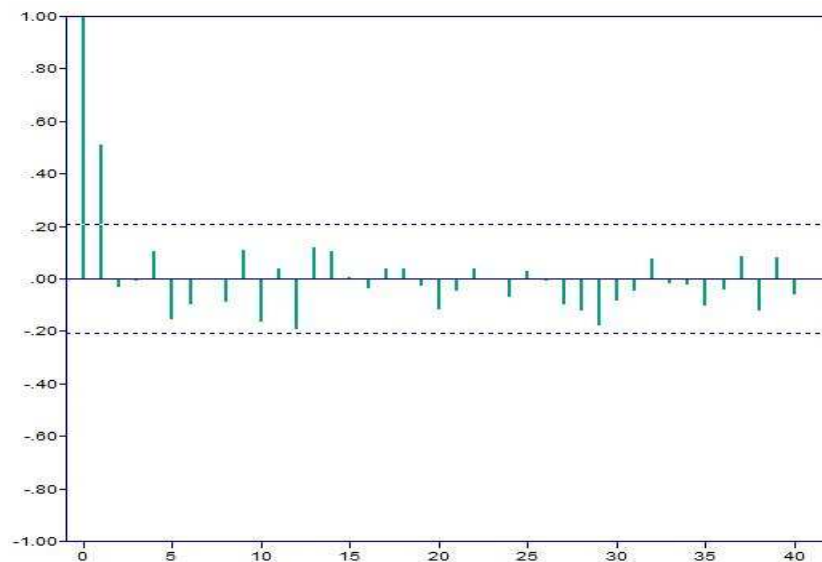
Wykres próbkowej funkcji autokorelacji dla danych procesu  $X_t^{(1)} = m_t - \hat{m}_t + s_t - \hat{s}_t + e_t$  został przedstawiony na rysunku 9.



Rys. 9. Próbkowa funkcja autokorelacji procesu  $X_t^{(1)} = (m_t - \hat{m}_t) + (s_t - \hat{s}_t) + e_t$ .

Wykres próbkowej funkcji autokorelacji cząstkowej dla danych procesu  $X_t^{(1)} = m_t - \hat{m}_t + s_t - \hat{s}_t + e_t$  został przedstawiony na rysunku 10.





Rys. 10. Funkcja autokorelacji cząstkowej procesu  $X_t^{(1)} = (m_t - \hat{m}_t) + (s_t - \hat{s}_t) + e_t$ .

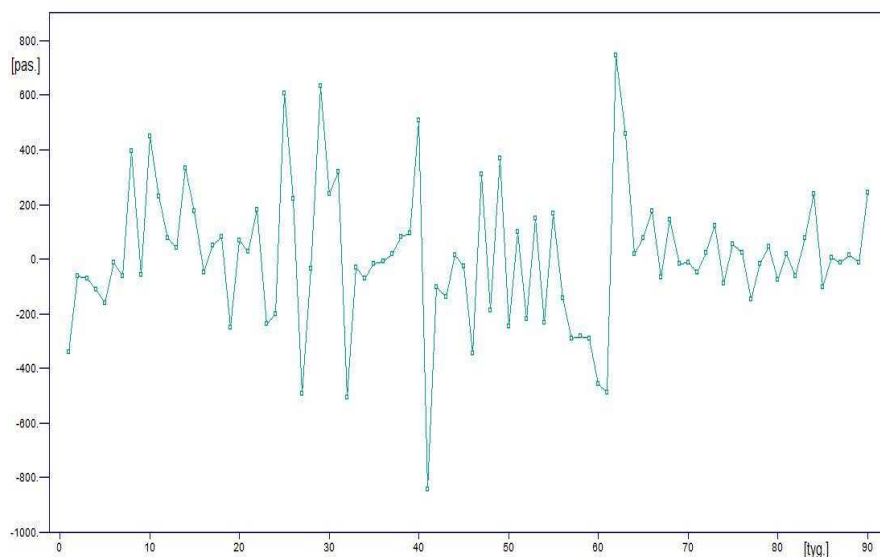
Z wykresu funkcji próbkowej autokorelacji i próbkowej autokorelacji cząstkowej widać, że residua nie pochodzą z IID szumu, co potwierdzają testy niezależności. Wartość statystyki dla testu Ljunga Boxa wynosi  $Q_{LB} = 50,26$ , a prawdopodobieństwo że jest to ciąg niezależnych zmiennych losowych wynosi 0,002. Podobny wniosek otrzymuje się przy innych testach. Proces ten nie jest więc ciągiem niezależnych zmiennych losowych.

Jako, że proces ten nie jest białym szumem dopasowuje się do niego jeden z procesów AR(p), MA(q), ARMA(p,q). Procedurę tę wykonuje się zgodnie z rozdziałem 5.2. [3].

Z obserwacji funkcji autokorelacji (rys. 9) i funkcji autokorelacji cząstkowej (rys. 10) widać, że można do procesu  $\{X_t^{(1)}\}$  dopasować albo proces średniej ruchomej rzędu 2 (MA(2)) albo proces autoregresji rzędu jeden (AR(1)).

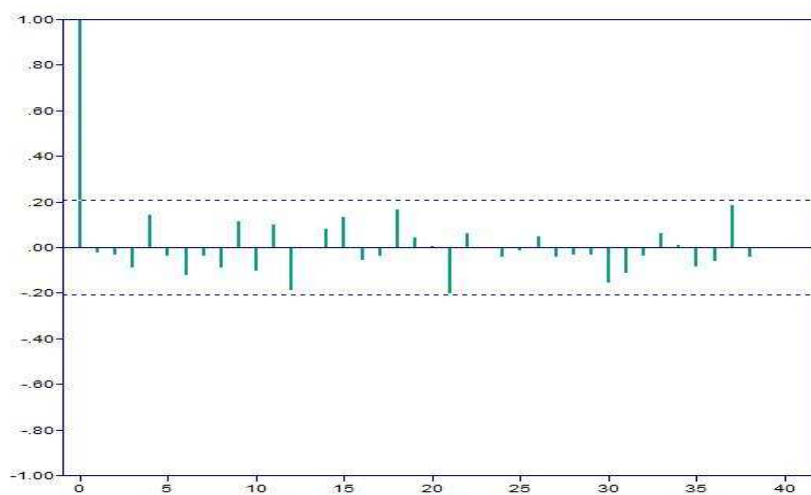
Proces najlepiej dopasowany do danych to proces AR(1)  $\hat{X}_t = 0,5255\hat{X}_{t-1} + \hat{Z}_t$ , ponieważ dla AR(1) wskaźnik AICC wyniósł 1255,98 natomiast dla MA(2) 1258,02.

Residua procesu  $X_t^{(2)} = X_t^{(1)} - \hat{X}_t$  przedstawione są na rysunku 11.



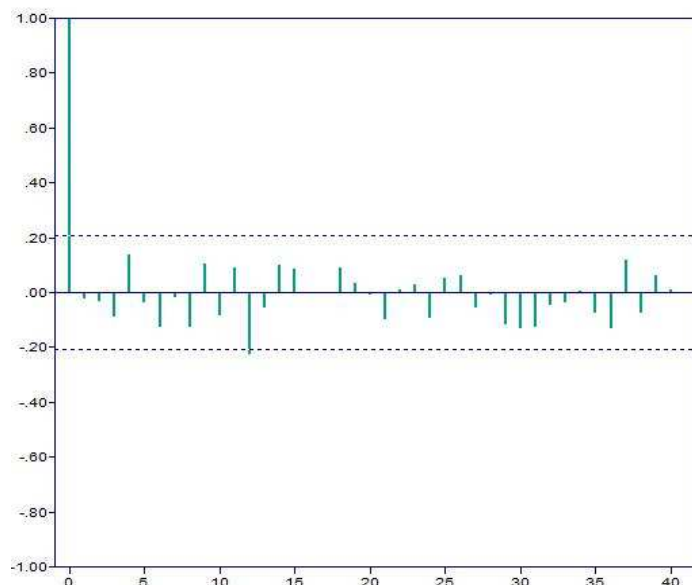
Rys. 11. Residua procesu  $X_t^{(2)} = X_t^{(1)} - \hat{X}_t$ .

Wartość funkcji autokorelacji dla procesu  $X_t^{(2)} = X_t^{(1)} - \hat{X}_t$  została przedstawiona na rysunku 12.



Rys. 12. Próbkowa funkcja autokorelacji procesu  $X_t^{(2)} = X_t^{(1)} - \hat{X}_t$ .

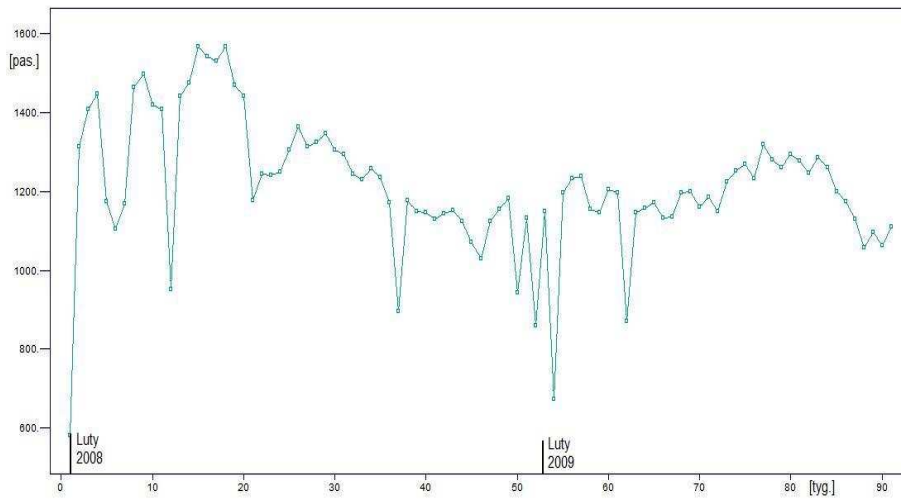
Próbkowa funkcja autokorelacji cząstkowej jest przedstawiona na rysunku 13.



Rys. 13 Próbkowa funkcja autokorelacji cząstkowej procesu  $X_t^{(2)} = X_t^{(1)} - \hat{X}_t$ .

Z wykresu funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej widać, że residua pochodzą z IID szumu, co potwierdzają testy niezależności. Mianowicie wartość statystyki dla testu Ljunga Boxa wynosi  $Q_{LB} = 13,211$ , natomiast prawdopodobieństwo że jest to ciąg niezależnych zmiennych losowych wynosi 0,86814. Proces ten więc jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych.

Powyższe rozważania dotyczyły przewoźnika A. Przewoźnik B zaczął swoją działalność po roku od rozpoczęcia działalności przewoźnika A. Rysunek 14 przedstawia liczbę pasażerów w poszczególnych tygodniach funkcjonowania przewoźnika B.



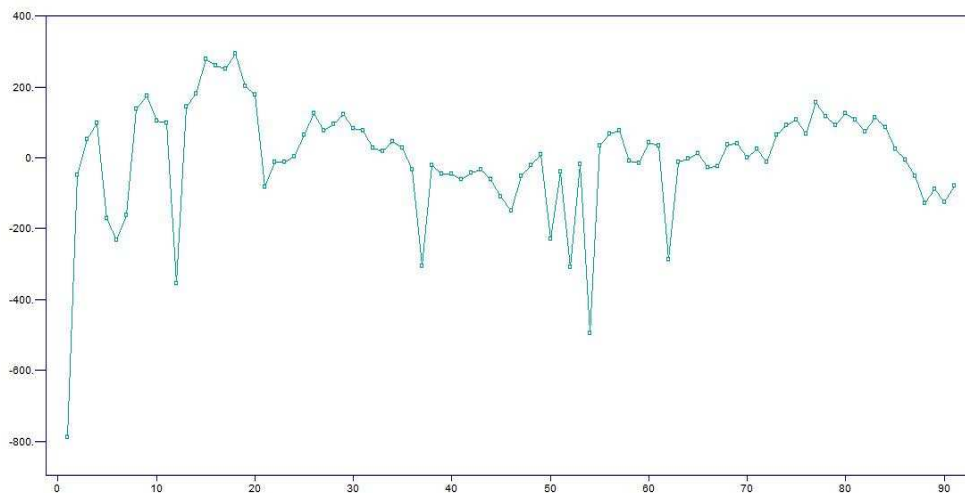
Rys. 14. Liczba pasażerów w poszczególnych tygodniach funkcjonowania przewoźnika B.

Widoczne są pewne nieregularności w pierwszych tygodniach, oraz wyraźne ustabilizowanie poziomu liczby pasażerów w dalszych tygodniach funkcjonowania przewoźnika.

Stosując metodę klasyczną dopasowania procesu do danych poprzez szacowanie funkcji trendu przy braku funkcji sezonowej otrzymujemy estymowaną funkcję trendu w postaci:

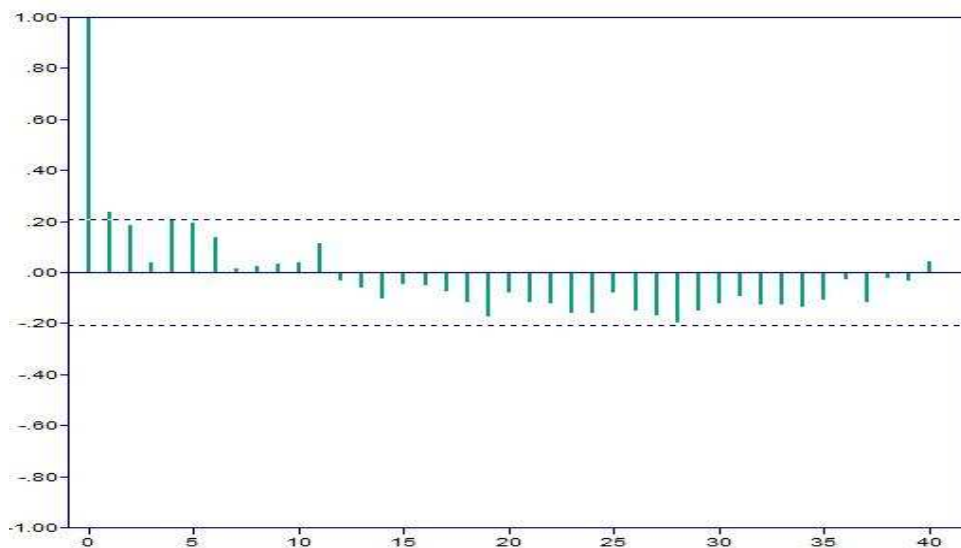
$$\hat{m}_t = 0,4973t^2 - 6,5617t + 1376.$$

Rysunek 15 przedstawia zmodyfikowany proces liczby przewiezionych pasażerów z usuniętym trendem  $Y_t^{(1)} = m_t - \hat{m}_t + e_t$



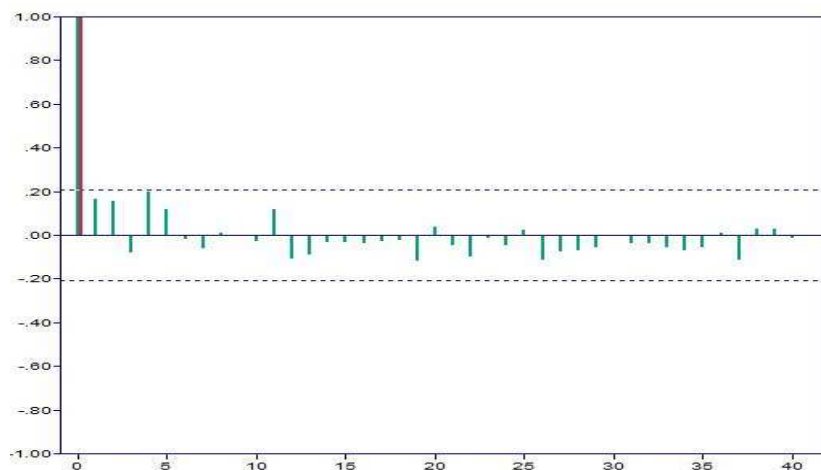
Rys. 15. Proces liczby pasażerów przewoźnika B postaci  $Y_t^{(1)} = m_t - \hat{m}_t + e_t$ .

Wykres próbkowej funkcji autokorelacji dla danych procesu  $Y_t^{(1)} = m_t - \hat{m}_t + e_t$  został przedstawiony na rysunku 16.



Rys. 16. Próbkowa funkcja autokorelacji procesu  $Y_t^{(1)} = (m_t - \hat{m}_t) + e_t$ .

Wykres próbkowej funkcji autokorelacji cząstkowej dla danych procesu  $Y_t = m_t - \hat{m}_t + e_t$  został przedstawiony na rysunku 17.

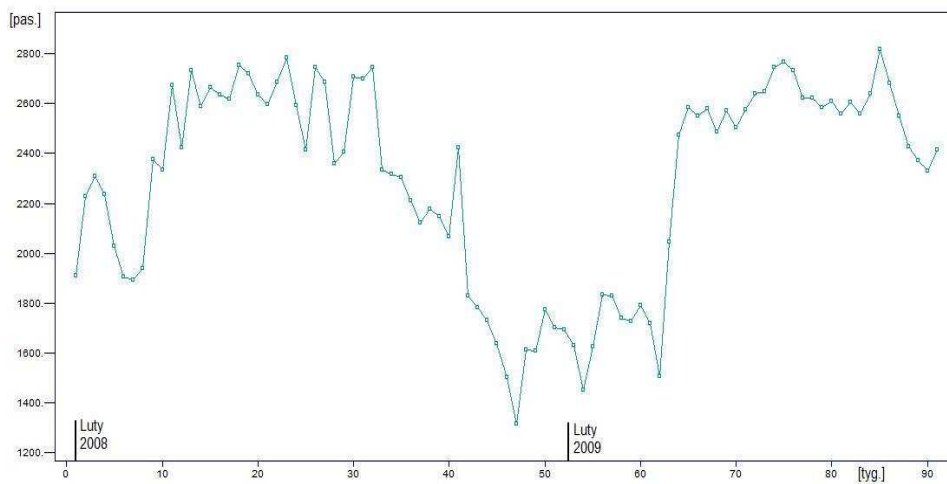


Rys. 17. Próbkowa funkcja autokorelacji cząstkowej procesu  $Y_t^{(1)} = (m_t - \hat{m}_t) + e_t$ .

Z wykresu funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej widać, że residua pochodzą z IID szumu, co potwierdzają testy niezależności. Wartość statystyki dla testu Ljunga Boxa

wynosi  $Q_{LB} = 14,004$ , natomiast prawdopodobieństwo że jest to ciąg niezależnych zmiennych losowych wynosi 0,83028. Proces ten więc jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Funkcja trendu została tym samym w sposób poprawny wyestymowana.

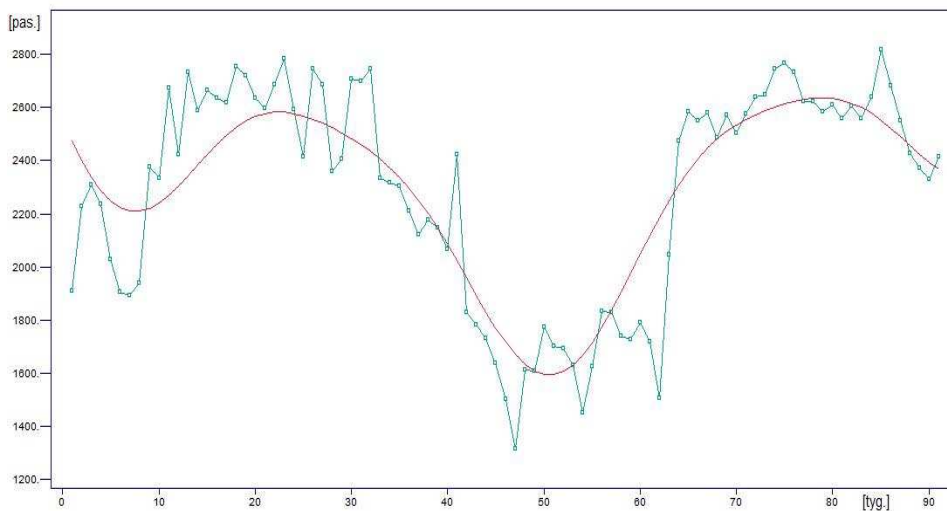
Powyższe estymacje procesów dotyczyły przewoźnika A i B oddzielnie. Interesującym jest analiza procesu sumy pasażerów w tygodniu dla przewoźnika A i B. Rysunek 18 przedstawia sumę pasażerów w całym okresie obserwacji przewoźnika A i B.



Rys. 18. Suma pasażerów przewoźników A i B w poszczególnych tygodniach.

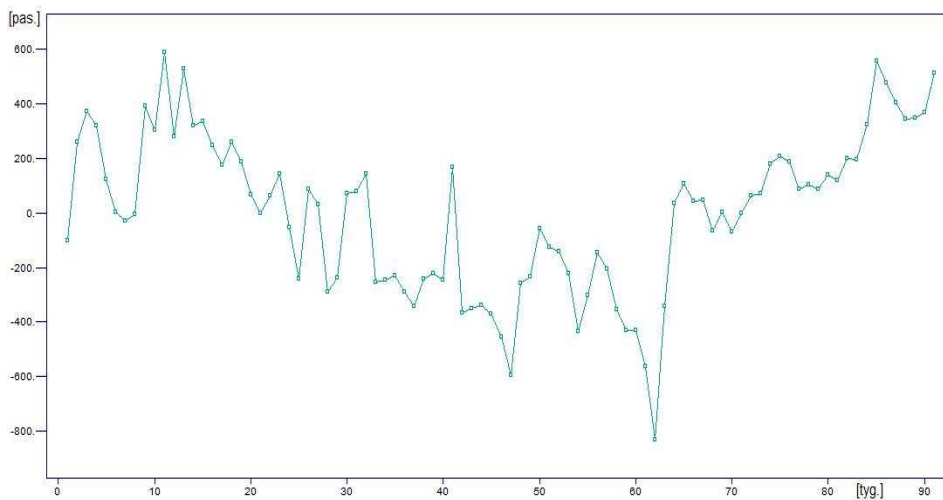
Stosując metodę klasyczną dopasowania procesu do danych poprzez szacowanie funkcji trendu przy występowaniu funkcji sezonowej otrzymuje się estymowaną funkcję trendu w postaci:  $\hat{m}_t = 0,34750t^2 - 33,687t + 574$

Dopasowana została również funkcja harmoniczna, której wykres wraz ze składową trendu został zaprezentowany na rysunku 19.



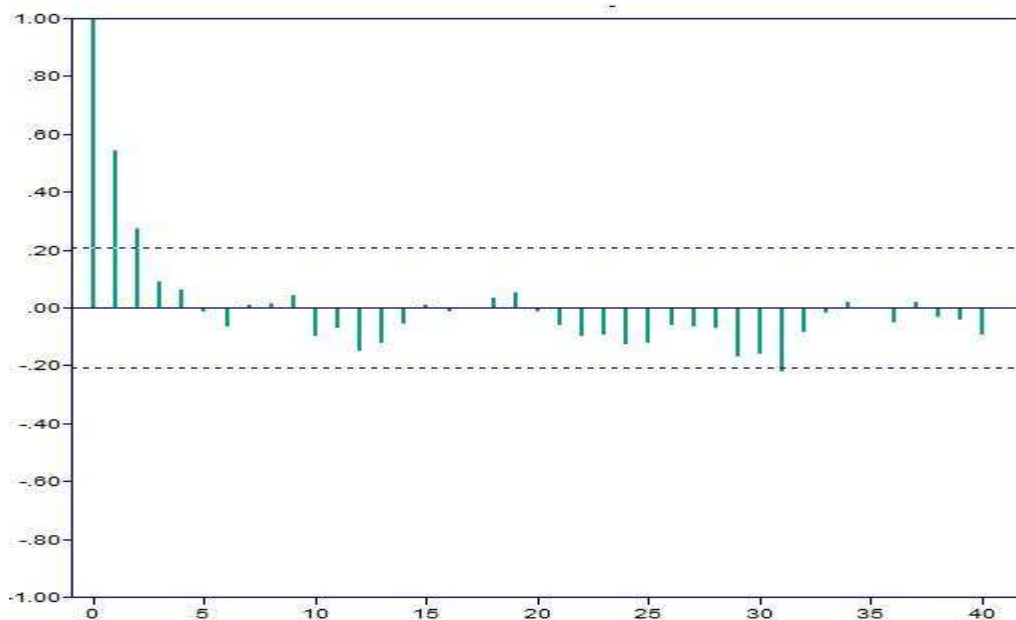
Rys. 19. Wyestymowana funkcja sezonowości.

Proces  $Y_t^{(1)} = m_t - \hat{m}_t + s_t - \hat{s}_t + e_t$  został przedstawiony na rysunku 20.



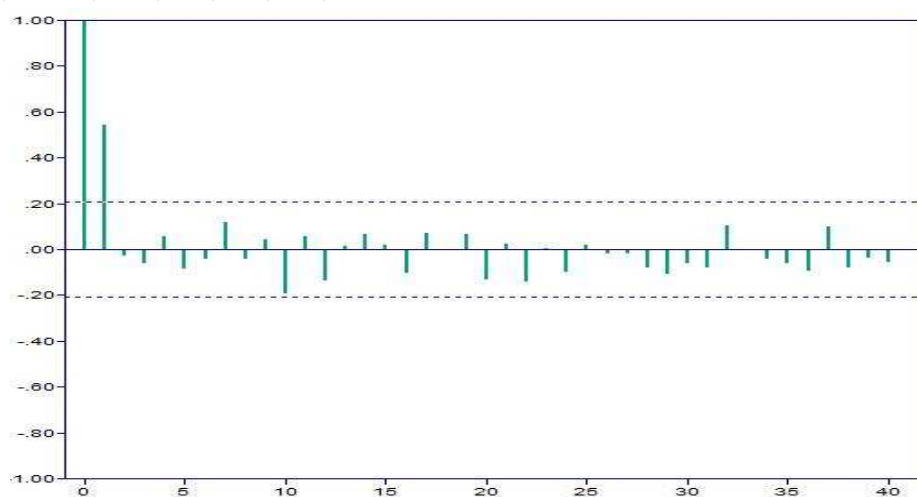
Rys. 20. Proces sumy liczby pasażerów przewoźników A i B z usuniętą składową trendu i sezonowości.

Wykres próbkowej funkcji autokorelacji dla danych procesu  $Y_t^{(1)} = m_t - \hat{m}_t + s_t - \hat{s}_t + e_t$  został przedstawiony na rysunku 21.



Rys. 21. Próbkowa funkcja autokorelacji procesu  $Y_t^{(1)} = m_t - \hat{m}_t + s_t - \hat{s}_t + e_t$ .

Wykres próbkowej funkcji autokorelacji cząstkowej dla danych procesu  $Y_t^{(1)} = m_t - \hat{m}_t + s_t - \hat{s}_t + e_t$  został przedstawiony na rysunku 22.



Rys. 22. Próbkowa funkcja autokorelacji cząstkowej procesu  $Y_t = (m_t - \hat{m}_t) + (s_t - \hat{s}_t) + e_t$ .

Z wykresu funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej widać, że residua nie pochodzą z IID szumu, co potwierdzają testy niezależności. Wartość statystyki dla testu

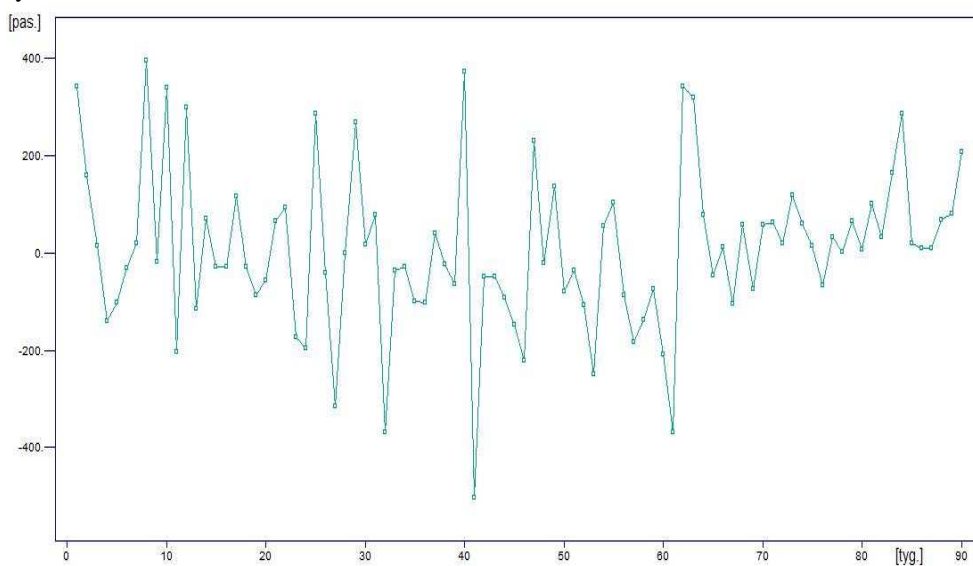


Ljunga Boxa wynosi  $Q_{LB} = 43,633$ , natomiast prawdopodobieństwo że jest to ciąg niezależnych zmiennych losowych wynosi 0,00169. Proces ten nie jest więc ciągiem niezależnych zmiennych losowych.

Proces ten nie jest białym szumem z tego względu dopasowujemy do niego jeden z procesów AR(p), MA(q), ARMA(p,q). Procedurę tę wykonujemy zgodnie z rozdziałem 5.2. [1].

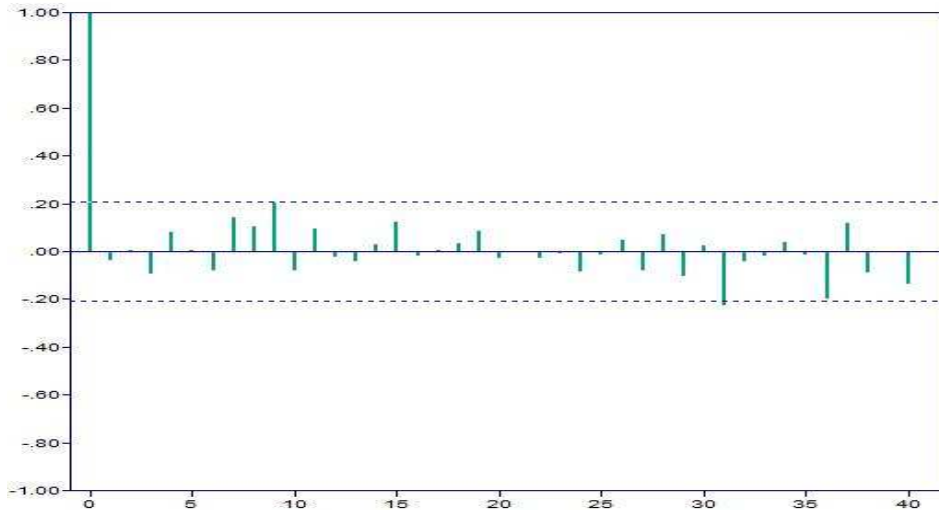
Proces najlepiej dopasowany do danych (zgodnie z kryterium AICC) to proces AR(1)

$\hat{X}_t = 0,8235\hat{X}_{t-1} + \hat{Z}_t$ . Residua procesu  $X_t^{(1)} = X_t - \hat{X}_t$  przedstawione są na rysunku 23.



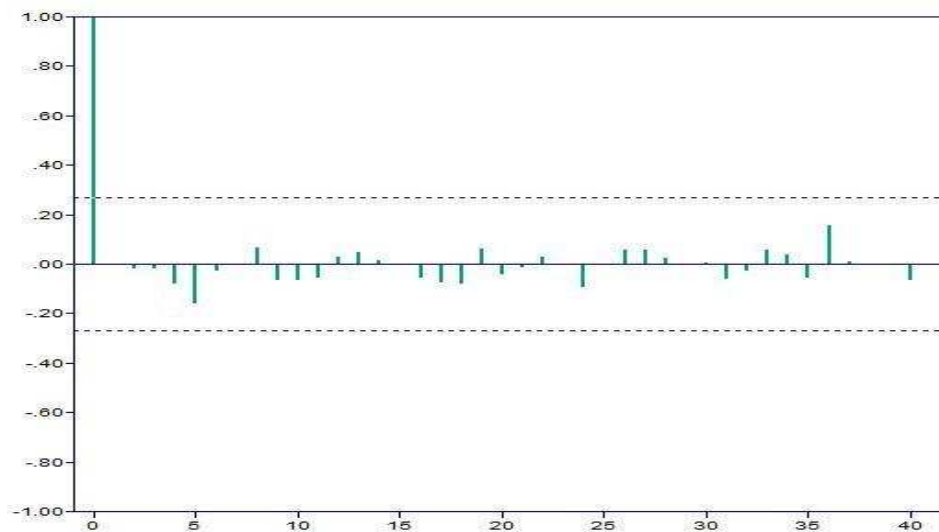
Rys. 23. Residua procesu  $Y_t^{(1)} = Y_t - \hat{Y}_t$ .

Wartość próbkowej funkcji autokorelacji dla procesu  $Y_t^{(1)} = Y_t - \hat{Y}_t$  została przedstawiona na rysunku 24.



Rys. 24 Próbkowa funkcja autokorelacji procesu  $Y_t^{(1)} = Y_t - \hat{Y}_t$ .

Wykres próbkowej funkcji autokorelacji cząstkowej dla danych procesu  $Y_t^{(1)} = Y_t - \hat{Y}_t$  został przedstawiony na rysunku 25.



Rys. 25 Próbkowa funkcja autokorelacji cząstkowej procesu  $Y_t^{(1)} = Y_t - \hat{Y}_t$ .

Z wykresu funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej widać, że residua pochodzą z IID szumu, co potwierdzają testy niezależności. Wartość statystyki dla testu Ljunga Boxa wynosi  $Q_{LB} = 13,827$ , natomiast prawdopodobieństwo że jest to ciąg niezależnych

zmiennych losowych wynosi 0,83914. Proces ten więc jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych.

## 2.2 Modelowanie wielowymiarowego szeregu czasowego

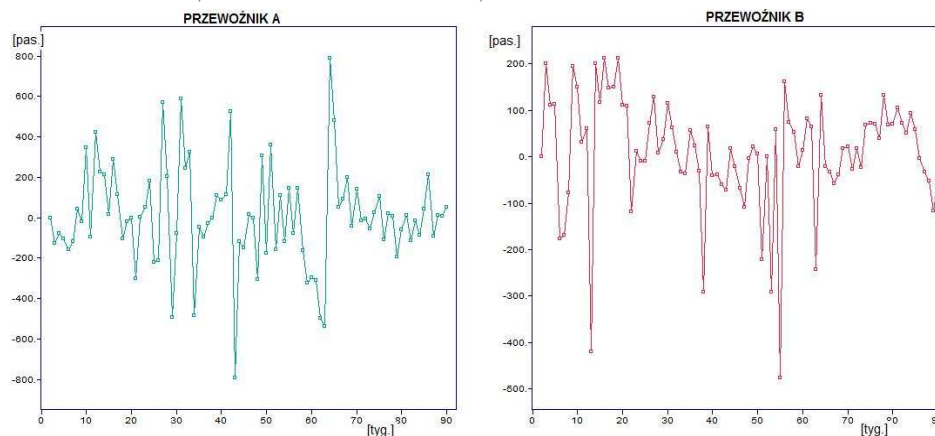
Ze względu na konkurencje pomiędzy przewoźnikami A i B kluczowe jest poszukiwanie zależności pomiędzy szeregami czasowymi. Podobnie jak w przypadku jednowymiarowych szeregów czasowych istnieje schemat postępowania w celu estymacji danych procesu (rozdział 7.6 [3]). Pierwszym krokiem jest usunięcie składowych trendu i sezonowości z każdego z procesów. Dla przewoźnika A operacja ta wykonana jest na rysunku 7 dla przewoźnika B na rysunku 12. Zgodnie z procedurą estymacji danych (7.6.1) oraz wskaźnikiem dopasowania procesu (rozdział 7.6.2, wzór 7.6.3) wielowymiarowy szereg czasowy ma postać:

$$\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,68 \\ 0,85 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,4725 & 0,3087 \\ 0,0763 & 0,2709 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1t-1} \\ X_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{pmatrix}$$

Jest to wielowymiarowy szereg AR(1). Kolejna analiza wielowymiarowego szeregu czasowego sprowadza się do sprawdzenia niezależności szeregów.

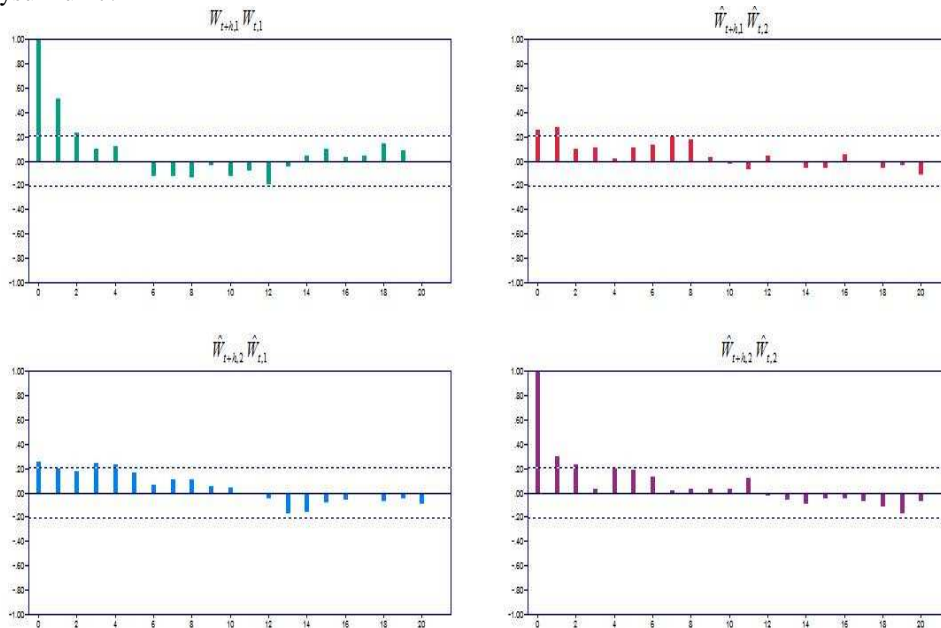
## 2.3 Badanie niezależności szeregów czasowych liczby pasażerów

W celu sprawdzenia niezależności dwóch szeregów czasowych należy wyznaczyć funkcję korelacji krzyżowej dla residuów procesu  $X_{1t}$ ,  $X_{2t}$ . Na tym etapie analizy szeregów czasowych nie stanowi to problemu, gdyż posiadamy już szeregi czasowe z których zostały usunięte składowe trendu oraz sezonowości. Równocześnie, jeśli dane procesy po usunięciu tych składowych nie tworzyły białego szumu, został wyznaczony model szeregu czasowego. Rysunek 26 przedstawia residua liczby pasażerów przewoźnika A (oznaczamy  $\hat{W}_{t,1}$ ) oraz B (oznaczamy  $\hat{W}_{t,2}$ ).



Rys. 26 Residua procesu liczby pasażerów przewoźnika A i B

Dla przedstawionych powyżej danych funkcja korelacji krzyżowej pomiędzy:  $(\hat{W}_{t+h,1} \hat{W}_{t,1})$ ,  $(\hat{W}_{t+h,1} \hat{W}_{t,2})$ ,  $(\hat{W}_{t+h,2} \hat{W}_{t,1})$ ,  $(\hat{W}_{t+h,2} \hat{W}_{t,2})$ , została przedstawiona na rysunku 27.



Rys. 27 Funkcja korelacji krzyżowej pomiędzy białymi szumami procesów liczby pasażerów przewoźnika A i B

Ponieważ funkcje korelacji krzyżowej nie mieszczą się w przedziale dopuszczalnym oznaczonym linia kreskowa na rysunku 27 więc szeregi czasowe liczby pasażerów przewoźnika A i B są zależne.

### 3. WNIOSKI

Z przedstawionej analizy szeregów czasowych wynika, że zawierają one składowe deterministyczną funkcję trendu i deterministyczną funkcję okresowości. Znalaziono również strukturę procesów błędów ( $e_t$ ). W pracy nie podjęto próby dopasowania modeli średniej ruchomej. Estymowane były modele autoregresji ze względu na to, że informują one jak wartość przyszła zależy od poprzednich. Ponadto w pracy zauważono zależność pomiędzy procesami liczby pasażerów przewoźnika A i B. Nie było celem pracy wyznaczenie funkcji struktury zależności pomiędzy tymi procesami jednak będzie to przedmiotem dalszych prac autora.

**4. BIBLIOGRAFIA**

- [1] Frans Middelham, Henk J. van Zuylen „Time series models to forecast air transport demand: A study about a regional airport”, Control in Transportation Systems, Volume 11 Part 1.
- [2] Geoffrey Rose „Transit passenger response: Short and long term elasticities using time series analysis“ Transportation Volume 13, Number 2, s. 131-141.
- [3] Peter J. Brockwell, Richard A. Davis „Introduction to Time Series and Forecasting”, Springer, 1996
- [4] Peter J. Brockwell, Richard A. Davis „Time series: theory and methods”, Springer, 1996