

BOMBA Ignacy<sup>1</sup>  
 WOŹNIAK Grzegorz<sup>2</sup>  
 KWIECIEN Katarzyna<sup>3</sup>

## Wykorzystanie programowania liniowego w projektowaniu paletowej jednostki ładunkowej

*Słowa kluczowe: programowanie liniowe, optymalizacja, jednostka ładunkowa, paleta*

### Streszczenie

W artykule zostały opisane zagadnienia związane z zastosowaniem programowania liniowego w projektowaniu paletowej jednostki ładunkowej. Opracowany został model matematyczny optymalizacji jednostki ładunkowej, wyznaczona funkcja celu oraz kryteria ograniczające poszukiwanego rozwiązania. Zaproponowaną procedurę optymalizacji poddano weryfikacji z wykorzystaniem obliczeniowych programów komputerowych. Część obliczeniowa pracy oparta została na zalecanych wartościach wymiarów i mas ładunków jednostkowych, zbiorczych oraz transportowych – wynikających z polskich norm i informacji uzyskanych od firm z branży TSL.

### THE USE OF LINEAR PROGRAMMING IN THE DESIGN OF PALLET UNIT LOAD

#### Abstract

The article describes the issues associated with the use of linear programming in the design of pallet unit load. The mathematical model was developed to optimize loading unit, designated the objective function and the limiting criteria sought disbanded. The proposed optimization procedure was verified with the use of computational software. Some computational work was based on the recommended values of the dimensions and weight of unit loads, bulk and transport - resulting from the Polish standards and information received from companies from the TSL.

#### 1. WSTĘP

Jedną z czynności w procesie transportowym jest właściwe przygotowanie ładunków do przewozu. Jeśli przewóz odbywa się z wykorzystaniem palet, czynności przygotowawcze określane są mianem - formowanie paletowej jednostki ładunkowej. Do głównych zamierzeń właściwego formowania jednostki ładunkowej należy:

- zapewnienie racjonalnego wykorzystania pomocniczych środków transportu (np. paleta),
- zapewnienie racjonalnego wykorzystania maszyn i urządzeń ładunkowych,
- zapewnienie racjonalnego wykorzystania przestrzeni ładunkowej środków transport,
- zapewnienie racjonalnego wykorzystania powierzchni magazynowych,
- poprawę podatności transportowej ładunku.

Wymienione cele osiąga się między innymi przez ujednoczenie postaci transportowej ładunków – w efekcie stosowania znormalizowanych opakowań i jednostek ładunkowych.

Opakowaniami w rozumieniu ustawy „O opakowaniach i odpadach opakowaniowych” są wprowadzone do obrotu wyroby, przeznaczone do przechowywania, ochrony, przewozu, dostarczania lub prezentacji wszelkich produktów, od surowców do towarów przetworzonych.

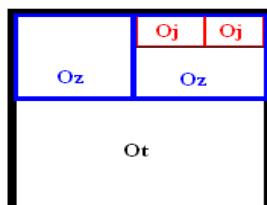
Opakowania obejmują następujące kategorie (hierarchiczny podział opakowań ukazuje rys.1):

- **jednostkowe**, służące do przekazywania produktu użytkownikowi w miejscu zakupu, w tym przeznaczone do konsumpcji produktów naczynia jednorazowego użytku;
- **zbiorcze**, zawierające wielokrotność opakowań jednostkowych produktów, niezależnie od tego, czy są one przekazywane użytkownikowi, czy też służą zaopatrywaniu punktów sprzedaży i które można zdjąć z produktu bez naruszenia jego cech;

<sup>1</sup> Politechnika Radomska, Wydział Transportu i Elektrotechniki; 26-600 Radom; ul. Malczewskiego 29.  
 Tel: + 48 48 361-77-84, Fax: + 48 48 361-77-42, E-mail: i.bomba@pr.radom.pl

<sup>2</sup> Politechnika Radomska, Wydział Transportu i Elektrotechniki, student VII sem., kierunek Transport.

<sup>3</sup> Politechnika Radomska, Wydział Transportu i Elektrotechniki, doktorantka.



**O<sub>j</sub>** - opakowanie jednostkowe  
**O<sub>z</sub>** - opakowanie zbiorcze  
**O<sub>t</sub>** - opakowanie transportowe

Rys.1. Hierarchiczny podział opakowań.

- **transportowe**, służące do transportu produktów w opakowaniach jednostkowych lub zbiorczych w celu zapobiegania ich uszkodzeniom, z wyłączeniem kontenerów do transportu drogowego, kolejowego, wodnego lub lotniczego[3].

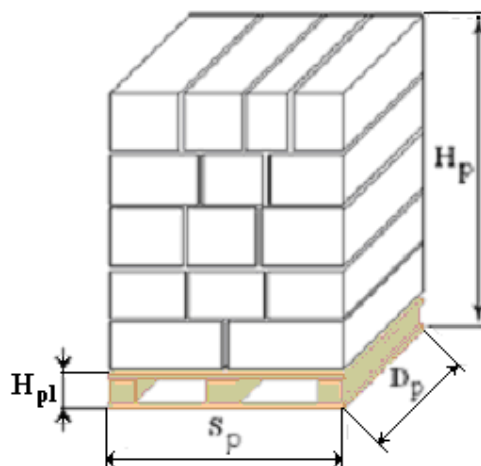
Opakowania transportowe są formowane w jednostki ładunkowe. Jednostką ładunkową jest określona ilość ładunku zestawionego w jedną całość, z wykorzystaniem pomocniczych środków wiążących lub urządzeń transportowych, w sposób zapewniający trwałość jej kształtu, wymiarów i zawartości od miejsca jej zestawienia poprzez cały łańcuch transportowy aż do chwili rozformowania, umożliwiającą pełną mechanizację przeładunków na drodze swego przebiegu, z zachowaniem warunków bezpieczeństwa i higieny pracy przy przewozie, przeładunkach i składowaniu [1].

## 2. PODSTAWY BUDOWY MODELU MATEMATYCZNEGO OPTYMALIZACJI JEDNOSTKI ŁADUNKOWEJ

Ze względu na dużą różnorodność ładunków i opakowań nie możliwym jest zbudowanie modelu, który uwzględniłby całość zagadnień związanych z kształtowaniem wszystkich ładunków. W związku z powyższym w opracowaniu skupiono się na towarach pakowanych w opakowania jednostkowe i zbiorcze, wykonane z kartonu lub tektury. Ponadto w rozważaniach za formę jednostki ładunkowej przyjęto opakowanie transportowe zbudowane z wykorzystaniem palety.

Za formę opakowania transportowego przyjęto paletę ładunkową o wymiarach zewnętrznych według normy PN-89/O-79021 „Opakowania. System wymiarowy”, jest to paleta typu EUR wykonana zgodnie z kartą UIC 435-2 (rys.2).

Ponadto norma PN-82/M-78202 „Paletowe i bezpaletowe jednostki ładunkowe. Parametry podstawowe” określa wysokość paletowej jednostki ładunkowej (rys.2).



Wymiary przy 22% zawartości wilgotności				
Długość	Szerokość	Wysokość palety	Wysokość jednostki paletowej	Nośność
$D_p$	$S_p$	$h_p$	$H_p$	$M_p$
[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[kg]
1200	800	144	1750	1500

Rys.2. Jednostka paletowa zbudowana na paletcie EUR.

Firmy świadczące usługi transportowe przyjmują do przewozu wyższe ładunki, niż wymienione w normie (np. PKAES S.A. Błonie  $H_p = 1800mm$ , Siódemka S.A.  $H_p = 2200mm$ , DHL dopuszcza  $H_p = 2100mm$ , preferuje  $H_p = 1500mm$ ).

Ze względu na właściwy stopień wykorzystania palety ładunki umieszczane na paletcie można podzielić na dwie grupy:

1. lekkie – wypełniające 80%÷100% maksymalnej objętość bryły jednostki paletowej ( $V=S_p \cdot xD_p \cdot xH_p$ ) i masie mniejszej lub równej nośności palety  $M_p$ ,
2. ciężkie – o masie równej nośności palety  $M_p$  i wypełniające mniej niż 80% maksymalnej objętość bryły jednostki paletowej.

W artykule zaprezentowano wykorzystanie programowania liniowego w projektowaniu paletowej jednostki ładunkowej dla ładunków grupy 1.

W związku z tym, że prace kompletacji i dekompletacji jednostek paletowych wykonywane są ręcznie, dlatego przewidziane zostały aspekty związane z masą ładunku.

Dopuszczalne wartości podnoszonych i przenoszonych ciężarów są określone w polskich normach, zostały one ustalone z uwzględnieniem między innymi:

- płci pracownika,
- wieku pracownika.

Normy podnoszenia ręcznego przedstawiono w tabeli 1.

Tab.1. Normy podnoszenia dla osób dorosłych[4]

Praca	Kobiety	Mężczyźni	
		Mężczyźni	Praca zespołowa
Stała	12kg	30kg	max 25kg/1 os.
Dorywcza (max 4x godz.)	20kg	50kg	max 42kg/1 os.

Model decyzyjny uwzględnia również właściwości wytrzymałościowe opakowań zbiorczych i jednostkowych. Warunkują one możliwości piętrenia ładunków oraz ułożenia warstwowego. Bazując na formule Mckee w obliczeniach uwzględniony został parametr BCT (Box Compression Test) dotyczący opakowań wykonanych z tektury [5]:

$$BCT = \frac{5,87 \cdot ECT \cdot \sqrt{2(l_s + l_d) \cdot h}}{\psi \cdot g} \quad (1)$$

gdzie:  $BCT$  – odporność na ściskanie pudła [kg],

$ECT$  – odporność na zgniatanie kolumnowe [kN/m],

$l_s$  - szerokość opakowania [mm],

$l_d$  - długość opakowania [mm],

$h$  - grubość tektury użytej do wykonania opakowania [mm],

$g$  - przyspieszenie ziemskie [ $m/s^2$ ],

$\psi$  - współczynnik bezpieczeństwa składowania (3÷5).

### 3. MODEL MATEMATYCZNY OPTIMALIZACJI JEDNOSTKI ŁADUNKOWEJ

Przyjęte zostały następujące wstępne założenia modelu decyzyjnego optymalizacji formowania ładunku:

- jednorodność opakowań zbiorczych umieszczanych na paletcie,
- wykorzystane opakowania cechują się określonymi właściwościami fizycznymi,
- opakowania zbiorcze mogą zostać umieszczone tylko wewnątrz obrysu jednostki ładunkowej,
- gabaryty jednostki ładunkowej i opakowań są znormalizowane.

Dla wyznaczenia funkcji celu wykorzystano z PN-89/O-79021 wzór na teoretyczny zewnętrzny wymiar opakowania jednostkowego:

$$l_j = l + \Delta l + b + \frac{c}{k} + \frac{f}{k} \quad (2)$$

gdzie:  $l_j$  - teoretyczny zewnętrzny wymiar opakowania jednostkowego (długość, szerokość, wysokość) [mm],

$l$  - wewnętrzny wymiar opakowania jednostkowego (długość, szerokość, wysokość) [mm],

$\Delta l$  - sumaryczna wielkość deformacji napełnionego opakowania [mm],

$b$  - sumaryczna grubość ścianek opakowania z uwzględnieniem elementów zwiększających jego wymiary (burty, rączki, itp.) [mm],

$c$  - wielkość luzu niezbędnego do układania opakowań [mm],

$f$  - łączny wymiar elementów uzupełniających (przekładki, przegródki, itp.) [mm],

$k$  - liczba opakowań jednostkowych w rzędzie dla jednego wymiaru wewnętrznego opakowania transportowego [sztuk].

Jako zadanie optymalizacyjne przyjęto znalezienie maksimum funkcji, która opisuje liczbę ładunków jednostkowych w opakowaniach zbiorczych umieszczonych na paletcie:

$$f(l_{jD}, l_{jS}, l_{jH}, K_D, K_S, K_H) \rightarrow \max \quad (3)$$

gdzie:  $l_{jD}$  - teoretyczna długość zewnętrzna opakowania jednostkowego [mm],  
 $l_{jS}$  - teoretyczna szerokość zewnętrzna opakowania jednostkowego [mm],  
 $l_{jH}$  - teoretyczna wysokość zewnętrzna opakowania jednostkowego [mm],  
 $K_D$  - liczba opakowań zbiorczych w rzędzie (wzdłuż boku  $D_p$ ) [sztuk],  
 $K_S$  - liczba opakowań zbiorczych w rzędzie (wzdłuż boku  $S_p$ ) [sztuk],  
 $K_H$  - liczba opakowań zbiorczych w kolumnie (wzdłuż wysokości  $H_p$ ) [sztuk].

Korzystając ze wzoru (2) i dokonując odpowiednich przekształceń otrzymujemy funkcję celu w postaci:

$$f(l_{jD}, l_{jS}, l_{jH}, K_D, K_S, K_H) = \frac{D_p - \alpha_1 \cdot K_D - \alpha_D}{l_{jD}} \cdot \frac{S_p - \alpha_2 \cdot K_S - \alpha_S}{l_{jS}} \cdot \frac{H_p - \alpha_3 \cdot K_H - \alpha_H - h_p}{l_{jH}} \cdot 100\% \quad (4)$$

gdzie:  $\alpha_1$  - sumaryczna wielkość deformacji i grubości ścianek wyznaczona dla długości opakowania zbiorczego [mm];  
 $\alpha_2$  - sumaryczna wielkość deformacji i grubości ścianek wyznaczona dla szerokości opakowania zbiorczego [mm];  
 $\alpha_3$  - sumaryczna wielkość deformacji i grubości ścianek wyznaczona dla wysokości opakowania zbiorczego [mm];  
 $\alpha_D$  - łączny wymiar luzu i elementów wypełniających między opakowaniami zbiorczymi, zastosowane wzdłuż długości palety [mm];  
 $\alpha_S$  - łączny wymiar luzu i elementów wypełniających między opakowaniami zbiorczymi, zastosowane wzdłuż szerokości palety [mm];  
 $\alpha_H$  - łączny wymiar luzu i elementów wypełniających między opakowaniami zbiorczymi, zastosowane wzdłuż wysokości palety [mm];  
 $h_p$  - wysokość palety [mm].

Często dziedziną funkcji celu jest ograniczona (tzn. że zmienne decyzyjne nie mogą przyjmować dowolnych wartości), mamy wtedy do czynienia z optymalizacją z ograniczeniami [2].

Zmienne  $l_{jD}, l_{jS}, l_{jH}$  są zdeterminowane wymiarami wewnętrznymi opakowania jednostkowego i przyjmują wartości liczbowe wyznaczone ze wzoru (2).

Zmienne  $K_D, K_S, K_H$  są również zdeterminowane i powinny spełniać warunki:

$$K_D \geq 1 \wedge K_D \in \mathbb{C} \quad (5)$$

$$K_S \geq 1 \wedge K_S \in \mathbb{C} \quad (6)$$

$$K_H \geq 1 \wedge K_H \in \mathbb{C} \quad (7)$$

Ponadto przyjmują wartości liczbowe, które podstawione do równań (8), (9) i (10) dają w wyniku zalecane np. przez FEFCO (European Federation of Corrugated Board Manufacturers czyli Europejska Federacja Producentów Tektury) wymiary (AxBxH) opakowań zbiorczych:

$$\frac{D_p - \alpha_D}{K_D} - \Delta L_D = A \quad (8)$$

$$\frac{S_p - \alpha_S}{K_S} - \Delta L_S = B \quad (9)$$

$$\frac{H_p - \alpha_H - h_p}{K_H} - \Delta L_H = H \quad (10)$$

gdzie:  $\Delta L_D$  - sumaryczna wielkość deformacji długości napełnionego opakowania zbiorczego [mm],  
 $\Delta L_S$  - sumaryczna wielkość deformacji szerokości napełnionego opakowania zbiorczego [mm],  
 $\Delta L_H$  - sumaryczna wielkość deformacji wysokości napełnionego opakowania zbiorczego [mm].

Kolejne ograniczenie, które może być wprowadzone, dotyczy masy ładunku w opakowaniu zbiorczym:

$$k_d \cdot k_s \cdot k_h \cdot m_j + m_T \leq m_z \quad (11)$$

gdzie:  $k_d$  - liczba opakowań jednostkowych ułożonych wzdłuż wymiaru **A** opakowania zbiorczego [sztuk],  
 $k_s$  - liczba opakowań jednostkowych ułożonych wzdłuż wymiaru **B** opakowania zbiorczego [sztuk],  
 $k_h$  - liczba opakowań jednostkowych ułożonych wzdłuż wymiaru **H** opakowania zbiorczego [sztuk],

$m_j$  - masa brutto ładunku jednostkowego,

$m_T$  - masa pustego opakowania zbiorczego,

$m_z$  - masa brutto opakowania zbiorczego.

Analizując wartości w tab.1 można stwierdzić, że właściwym jest projektowanie ładunków o masie nie przekraczającej 12kg, wówczas przenoszenie takich ładunków może wykonywać każdy dorosły pracownik.

Koniecznym ograniczeniem jest warunek nie przekroczenia nośności palety:

$$K_D \cdot K_S \cdot K_H \cdot m_z \leq M_P \quad (12)$$

Ostatnim ograniczeniem zastosowanym w modelu jest warunek wytrzymałości opakowania zbiorczego, liczony dla dolnej warstwy opakowań umieszczonych na jednostce paletowej:

$$(K_H - 1) \cdot m_z \leq BCT \quad (13)$$

#### 4. WERYFIKACJA MODELU MATEMATYCZNEGO

Sprawdzenie poprawności modelu matematycznego wykonano wykorzystując oprogramowanie komputerowe.

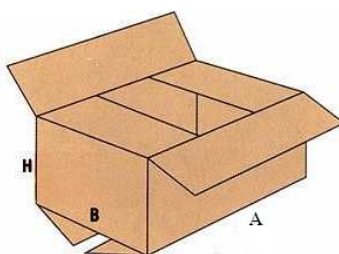
Poniżej prezentowane są dane wejściowe i wyniki przykładowej weryfikacji:

- opakowanie jednostkowe wykonane z kartonu o parametrach zawartych w tabeli 2,

Tab.2. Opakowanie jednostkowe

Parametr	Oznaczenie	Wartość
Długość	$l_{jD}$	60mm
Szerokość	$l_{jS}$	42mm
Wysokość	$l_{jH}$	128mm
Masa	$m_j$	410g

- opakowanie zbiorcze wykonane z tektury falistej zgodnej ze wzorem opakowania 0201 (rys. 3) według katalogu FEFCO, o wymiarach zawartych w tabeli 3,



Rys.3. Opakowanie zbiorcze.

Tab.3. Parametry opakowania zbiorczego

Parametr	Oznaczenie	Wartość
Długość	$A$	256mm
Szerokość	$B$	140mm
Wysokość	$H$	300mm
Masa brutto	$m_z$	9,84kg
Tektura o fali BC		
Grubość	$h$	6mm
Odporność na zgniatanie kolumnowe	ECT	7,2 kN/m
Odporność na ściskanie pudła	BCT	64,7 kg

- opakowanie transportowe zbudowane na bazie palety EUR o parametrach ukazanych na rys.2. Pozostałe wartości rozwiązania optymalnego zamieszczono w tabeli 4.

Tab.4. Wyniki optymalizacji opakowania transportowego

Parametr	Oznaczenie	Wartość
Stopień wykorzystania palety	$f(l_{jD}, l_{jS}, l_{jH}, K_D, K_S, K_H)$	83,3%
Bryła ładunku		
Ilość opakowań zbiorczych ułożona wzdłuż boku palety $S_p$	$K_D$	3
Ilość opakowań zbiorczych ułożona wzdłuż boku palety $D_p$	$K_S$	8
Ilość opakowań zbiorczych ułożona wzdłuż boku palety $H_p$	$K_H$	5
Masa ładunku		1180,8kg

## 5. WNIOSKI

Zagadnienie optymalizacji jednostek ładunkowych jest bardzo istotne z punktu widzenia racjonalnego wykorzystania możliwości maszyn i urządzeń ładunkowych, środków transportu oraz magazynów.

Optymalne zaprojektowanie jednostki ładunkowej, zgodne z normami i zwyczajami handlowymi, zapobiega :

- powiększeniu jej wymiarów – co może prowadzić do jej zaklinowania lub uszkodzenia ładunku,
- zmniejszeniu wymiarów – co powoduje zmniejszenie stopnia wykorzystania palety i przestrzeni ładunkowej środków transportu oraz magazynów.

Artykuł został poświęcony wykorzystaniu programowania liniowego w optymalizacji paletowej jednostki ładunkowej, z ograniczeniem do towarów lekkich – zaprezentowanych w punkcie 2 opracowania. Ograniczenie to przyjęto na podstawie obserwacji, z których wynika, iż większość ładunków przewożonych na paletach spełnia wymienione kryteria ładunków lekkich.

W normach dotyczących stopnia wykorzystania możliwości ładunkowych palet, uwzględnia się tylko jej powierzchnię. W związku z tym, że ładunek jest bryłą, w artykule zaproponowano procedurę uwzględniającą również wysokość ładunku, w procesie optymalizacji paletowej jednostki ładunkowej. Ponadto procedura ta została rozszerzona o aspekt dopuszczalnej masy ładunków, wynikający z przepisów BHP oraz nośności palety.

Wykonany matematyczny model optymalizacji został poddany weryfikacji poprzez wprowadzanie różnych danych wejściowych. Otrzymane wyniki potwierdziły trafność przyjętych założeń, gdyż funkcja celu przyjmowała wartości z przedziału 80%÷100%.

Zaproponowana procedura programowania liniowego może być wykorzystana w praktyce, jak również na zajęciach ze studentami z zakresu ładunkoznawstwa.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Jakubowski L.: *Technologia prac ładunkowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2003.
- [2] Stadnicki J.: *Teoria i praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji*, Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 2006.
- [3] Ustawa „O opakowaniach i odpadach opakowaniowych”, Dz.U. 01.63.638.
- [4] Rozporządzenie Ministra Pracy i Polityki Społecznej „W sprawie bezpieczeństwa i higieny pracy przy ręcznych pracach transportowych”, Dz.U.00.26.313 i Dz.U.02.127.1092.
- [5] [http://www.richbox.com/about\\_boxes/mckee\\_formula.asp](http://www.richbox.com/about_boxes/mckee_formula.asp).